

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier P. Scherrer E. Stiefel
F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler
Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

GUPTA, S. CH.: Slow Broad Side Motion of a Flat Plate in a Viscous Liquid	257
MOZUMDER, A.: Charge and Discharge of a Non-Linear Condenser Through a Linear Non-Dissipative Inductance	261
OSTROWSKI, A.: Über näherungsweise Auflösung von Systemen homogener linearer Gleichungen	280
STADELMAIER, H. H.: Spannungsfeld der auf den Rand einer elastisch anisotropen Halbebene wirkenden Tangentialkraft.	285
STEWARTSON, K.: Toroidal Oscillations of a Spherical Mass of Viscous Conducting Fluid in a Uniform Magnetic Field	290

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

BURGAT, P.: Résolution systématique de problèmes aux limites linéaires	297
GIESEKUS, H.: Einige Bemerkungen zu M. HANIN und M. REINER: 'On Isotropic Tensor-Functions and the Measure of Deformation'	303
HANIN, M., and REINER, M.: Comments on the Preceding Paper	306
SEN, B.: Note on a Direct Method of Solving Problems of Elastic Plates with Circular Boundaries Having Prescribed Displacement	307
VODIČKA, V.: Elementare Fälle des Dirichletschen Problems für elliptische Gebiete der Ebene	309

Varia - Miscellaneous - Divers

Frühjahrstagung 1957 der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft, Sitzungsberichte	313
Herbsttagung der SPG 1957	327
Internationale Tagung für Elektronenmikroskopie 1958 in Berlin	327
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques.	328

Z A M P	Vol. VIII	Fasc. 4	Pag. 257-328	25. 7. 57
---------	-----------	---------	--------------	-----------

Birkhäuser Verlag · Basel und Stuttgart

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten* von sFr. 20.- pro Seite und von der 25. Seite an einen solchen von sFr. 35.- pro Seite zu entrichten. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the *Editor*. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution of fr. 20.-* per page for pages 17–24, and of fr. 35.- per page for pages 25 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution de fr.s. 20.-* par page doit être payée pour les pages 17–24; à partir de page 25 la contribution est de fr.s. 35.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland sFr. 46.-, Ausland sFr. 58.- (DM 58.-), Einzelnummer sFr. 12.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland fr. 46.-, foreign fr. 58.-, single copy fr. 12.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse fr.s. 46.-, étranger fr.s. 58.-, le numéro fr.s. 12.-

Postabonnement – Post-Office Subscription – Abonnement par office postal:

Belgien/Luxemburg, Dänemark, Finnland, Holland, Italien, Marokko, Norwegen, Portugal, Schweden

Inserate – Advertisements – Annonces:

$\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr./DM 165.-, $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr./DM 88.-, $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr./DM 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. – All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. – Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1957

Printed in Switzerland

Slow Broad Side Motion of a Flat Plate in a Viscous Liquid

By SUBHAS CHANDRA GUPTA, Agra, India¹⁾

1. Introduction

The problem of slow broad-side motion of a flat plate in viscous liquid has been solved in terms of a function φ which turns out to be the electrostatic potential of the plate kept at a constant potential in vacuum. The hydrodynamical problem thus reduces to a problem in electrostatics with known boundary conditions. The function φ satisfies LAPLACE'S equation and the boundary conditions can be expressed in terms of φ . The problem corresponding to a disc of any arbitrary shape can be easily worked out by setting up an experiment based on this analogy.

The method has been applied to the case of a circular disc by introducing transforms and solving the problem as a boundary value problem in electrostatics. This problem has been also worked out by RAY²⁾ by using an *ad-hoc* method, but the present method gives a systematic and logical approach to problems of this kind. It has a distinct advantage over RAY'S method in which a correct form of the solution has to be guessed at the outset and later integral solutions have to be constructed which give desired discontinuity at the edges of the plate and this quite often is not easy.

2. The Equations of Motion, Their Solution and the Electrical Analogy

The hydrodynamical equations of slow viscous motion after neglecting the quadratic terms of inertia are:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \mu \nabla^2 u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = \mu \nabla^2 v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = \mu \nabla^2 w, \quad (3)$$

where

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

¹⁾ Department of Mathematics, Agra College.

²⁾ M. RAY, Phil. Mag. 21 (7), 553-558 (1936).

and the equation of continuity is

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Let

$$u = z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = z \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi. \quad (5)$$

Equation (4) now reduces to

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

From equations (1), (2) and (3) we find that

$$p' = p_0 + 2\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (7)$$

p_0 being a constant. The plate coincides with the plane $z = 0$ and is bounded by the curve $z = 0, f(x, y) = 0$ and is moving in the direction of the z -axis with a small velocity V . The boundary conditions are

$$u = v = 0, \quad w = V$$

on the plate, i.e., within

$$z = 0, \quad f(x, y) = 0,$$

and

$$u = v = w = 0,$$

at infinity. Thus the conditions expressed in terms of φ are

$$\varphi = -V,$$

on the plate, i.e., within

$$z = 0, \quad f(x, y) = 0,$$

and φ must tend to zero at infinity in a manner such that

$$z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad z \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{and} \quad z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

may also tend to zero. Also we see from (5) that on the plane $z = 0, u = v = 0$, i.e., there is no flow in the plane $z = 0$. The flow of the fluid is normal to the plane $z = 0$, and so the pressure throughout this plane must be constant. Therefore from (7)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \text{on} \quad z = 0, \quad (8)$$

outside the plate. Thus the problem may be briefly restated as follows:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (9)$$

$$\varphi = -V, \quad \text{within } z = 0, \quad f(x, y) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \text{outside } z = 0, \quad f(x, y) = 0, \quad (11)$$

and

$$z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad z \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{and} \quad \varphi$$

must all tend to zero at infinity.

This problem is same as that of determining the electrostatic potential of a conducting electrified disc in the plane $z = 0$, bounded by the curve $f(x, y) = 0$, kept at a constant potential $-V$ in vacuum.

3. The Case of a Circular Disc

As an example of the above general treatment we take the case of a circular disc. Without loss of generality we take the radius of the disc to be unity and z -axis centrally perpendicular to it. Transforming the equation (9) in cylindrical coordinates (r, θ, z) we get

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (12)$$

Here we have omitted the term $\partial^2 \varphi / \partial \theta^2$ due to symmetry about the z -axis. The boundary conditions are

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -V \quad (0 \leq r < 1), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \quad (r > 1). \end{aligned} \right\} \quad \text{on } z = 0. \quad (13)$$

Introducing Hankel transform defined by the relation

$$\bar{\varphi}(p) = \int_0^\infty \varphi(r) J_0(p r) r dr, \quad (15)$$

we find that

$$\int_0^\infty \nabla^2 \varphi(r) J_0(p r) r dr = \left[\frac{d^2}{dz^2} - p^2 \right] \bar{\varphi}(p).$$

Equation (12) becomes

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}(p)}{dz^2} = p^2 \bar{\varphi}(p). \quad (16)$$

Since the boundary conditions (13) and (14) are of a mixed type, we invert $\bar{\varphi}$ for φ before satisfying them.

In view of the symmetry of the problem it will be sufficient to consider the region $z > 0$. Since the potential must vanish at infinity, the appropriate

solution of (16) is

$$\bar{\varphi}(p) = A(p) e^{-pz} \quad (z > 0), \quad (17)$$

$A(p)$ being an unknown function of p .

Inversion for φ gives

$$\varphi = \int_0^{\infty} A(p) e^{-pz} p J_0(rp) dp. \quad (18)$$

If we insert (18) in the boundary conditions (13) and (14) we get the following dual integral equations:

$$\int_0^{\infty} p A(p) J_0(rp) dp = -V \quad (0 \leq r < 1), \quad (19)$$

$$\int_0^{\infty} p^2 A(p) J_0(rp) dp = 0 \quad (r > 1). \quad (20)$$

TITCHMARSH³⁾ and BUSBRIDGE⁴⁾ have considered dual integral equations of this type and their solution is

$$A(p) = -\frac{2}{\pi} \times \frac{V}{p^2} \sin p. \quad (21)$$

Thus the required solution is

$$\varphi = -\frac{2V}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-pz} J_0(rp) \frac{\sin p}{p} dp. \quad (22)$$

In this particular case Legendre transform can also be used employing oblate spheroidal coordinates. The result can be expressed in a neat form. Suppose (ξ, η) are oblate spheroidal coordinates related to the cylindrical coordinates (r, z) by

$$z = \xi \eta,$$

and

$$r = (1 - \xi^2)^{1/2} (1 + \eta^2)^{1/2}.$$

Transforming LAPLACE's equation into oblate spheroidal coordinates and employing Legendre transform of φ defined by

$$\bar{\varphi}(n) = \int_{-1}^{+1} \varphi P_n(\xi) d\xi,$$

³⁾ E. C. TITCHMARSH, *Theory of Fourier Integrals* (Oxford 1937), p. 335.

⁴⁾ I. W. BUSBRIDGE, *Proc. Lond. math. Soc.* 44 (2), 115-129 (1938).

we find that⁵⁾

$$\varphi = -\frac{2V}{\pi} \cot^{-1} \eta \quad (23)$$

This solution can be shown to agree exactly with the more complicated form given by (22).

The resistance of the fluid to the motion of the disc calculated from either (22) or (23) is $16V\mu$. If the radius of the disc be a the resistance can be shown to be $16Va\mu$, which is identical with that obtained by RAY²⁾.

I thank Dr. S. D. NIGAM for suggesting this problem to me.

Zusammenfassung

Das Problem der langsamen Querbewegung einer ebenen Platte in einer zähen Flüssigkeit ist zurückgeführt worden auf ein Problem der Elektrostatik. Die Geschwindigkeitskomponenten und der Druck können berechnet werden aus einer Funktion φ , die als die gleiche erscheint wie das elektrostatische Potential einer Platte unter konstantem Potential im Vakuum. Die Strömungsverhältnisse an einer Platte vom allgemeinen Umriss können mit Hilfe der Experimente auf Grund dieser Analogie bestimmt werden. Der Fall einer kreisrunden Platte wurde analytisch behandelt mit Hilfe der Abbildungen.

(Received: July 3, 1956.)

Charge and Discharge of a Non-Linear Condenser Through a Linear Non-Dissipative Inductance

By ASOKENDU MOZUMDER, Kharagpur, India¹⁾

Introduction

The capacity of a condenser with semi-conducting di-electric depends upon the voltage across it. This non-linearity arises from the processes of diffusion and recombination which occur within the di-electric, and is important at voltages below the breakdown value. At higher voltages, normal metallic conduction takes place and the non-linearity becomes inappreciable. Considering the building up of space charge at a blocking electrode by free charge carriers MACDONALD [1]²⁾ has deduced the formulae

$$C = C_0 \frac{\sinh \alpha V}{\alpha V} \quad (1a)$$

⁵⁾ C. J. TRANTER, *Integral Transforms in Mathematical Physics* (Methuen, 1951), p. 100.

¹⁾ Indian Institute of Technology, Department of Physics and Meteorology.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 279.

³⁾ Note that in [1] the differential capacity (dQ/dV) is deduced, whereas here the *corresponding* integral capacity (Q/V) is used since it is the latter capacity which appears in KIRCHHOFF's circuit equation (cf. [6]).

where C is the capacity of the condenser with voltage V across it, C_0 the capacity of the condenser with vanishingly small voltage across it, α a universal constant ($\epsilon/2KT$ or $\epsilon/4KT$ according as one or both electrodes block), ϵ the electronic charge, K BOLTZMANN'S constant and T the absolute temperature.

Building up of space charge at a blocking electrode occurs in the case of suitably biased rectifying electrodes [2], photoconductors [3], electrolytes [4], transistors [5], liquid di-electrics [4] and the like, which, therefore, show strong nonlinear capacities up to a certain voltage limited either by di-electric break-down or by field emission inside the di-electric or by both. Although, in most physical systems, the range of voltage over which the effect is marked is quite small, an analysis of circuits containing such non-linear capacities is important in certain switching circuits and di-electric amplifiers and may be of use in the design of waveform generators.

MACDONALD and BRACHMAN [6] have studied the charge and discharge of such a condenser through a linear resistance in a dc circuit. They have also considered an 'exponential' condenser for which

$$C = C_0 \exp |\alpha V| \quad (1b)$$

with the same significance of the symbols as in equation (1a), and have found that the two solutions have the same general characteristics. An exponential condenser can be physically realized with the help of a very high gain amplifier, a condenser feedback device and a circuit whose output is proportional to the exponential function of the input [6].

In the following, we shall discuss the oscillatory charge and discharge of an exponential (1b) and a sinh-type-condenser (1a) through a linear lossless inductance in a dc circuit and obtain the voltage and current waveforms.

The Charging of the Condenser

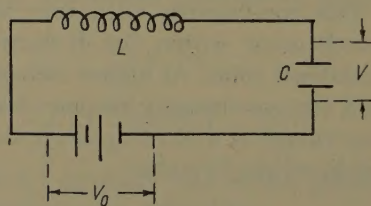


Figure 1
The charging circuit.

The differential equation of the circuit shown in Figure 1, for the process of charging, is

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + V = V_0, \quad (2)$$

where V_0 is the dc voltage of the source, V the voltage across the condenser at any instant of time t , L the inductance in the circuit and Q the charge on the condenser plates at the same instant of time t .

For the exponential condenser (1b) we have

$$Q = C_0 V e^{\alpha |V|} \quad (3)$$

and for the sinh-type condenser (1a)

$$Q = \left(\frac{C_0}{\alpha} \right) \sinh \alpha V. \quad (4)$$

Case I: The Exponential Condenser

With the initial conditions at $t = 0$, $V = 0$ and current $i = 0$ (and hence $dV/dt = 0$), V is always positive and hence V can be written for $|V|$ in equation (3). Differentiating (3) twice with respect to time and using equation (2), we get

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{\alpha (2 + \alpha V)}{1 + \alpha V} \left(\frac{dV}{dt} \right)^2 = \frac{V_0 - V}{L C_0 e^{\alpha V} (1 + \alpha V)}. \quad (5)$$

This equation can be linearized by the substitution

$$Z = \left(\frac{dV}{dt} \right)^2$$

to obtain

$$\frac{dZ}{dV} + \frac{2\alpha (2 + \alpha V)}{1 + \alpha V} Z = \frac{2(V_0 - V)}{L C_0 e^{\alpha V} (1 + \alpha V)} \quad (6)$$

the complete solution of which is

$$Z = \frac{\lambda e^{-2\alpha V}}{(1 + \alpha V)^2} + \frac{2 e^{-\alpha V}}{L C_0 (1 + \alpha V)^2} \left[V V_0 - V^2 - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{V}{\alpha} \right], \quad (7a)$$

where λ is the constant of integration. In view of the initial condition at $t = 0$, $dV/dt = 0$ (i. e., $Z = 0$), λ becomes $2/(\alpha^2 L C_0)$ and we have, from (7a),

$$\frac{dV}{dt} = \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{L C_0}} \cdot \frac{e^{-\alpha V}}{1 + \alpha V} [1 + e^{\alpha V} (\alpha^2 V V_0 - \alpha^2 V^2 - 1 + \alpha V)]^{1/2}. \quad (7b)$$

We shall see later that V is a periodic function of time. Starting from $t = 0$, therefore, the right-hand side of (7b) is to be taken with the positive sign until the first maximum is reached and then with the negative sign until the next minimum and so on.

Integrating (7b), we obtain

$$t = \sqrt{\frac{L C_0}{2}} \cdot \alpha \int_0^V e^{\alpha V} (1 + \alpha V) [1 + e^{\alpha V} (\alpha^2 V V_0 - \alpha^2 V^2 - 1 + \alpha V)]^{-1/2} dV.$$

This can be normalized to

$$\frac{t}{\tau} = \int_0^x e^x (1+x) \{1 + e^x (x x_0 - x^2 - 1 + x)\}^{-1/2} dx, \quad (8)$$

where

$$\tau = \sqrt{\frac{L C_0}{2}}, \quad x = \alpha V, \quad x_0 = \alpha V_0. \quad (9)$$

Numerical integration of (8) gives the waveform of the voltage across the condenser for a particular value of x_0 .

From (3) and (9), the normalized expression for current $i = dQ/dt$ becomes

$$i = \pm i_0 [1 + e^x (x x_0 - x^2 - 1 + x)]^{1/2}, \quad (10)$$

where

$$i_0 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2 C_0}{L}}.$$

The positive and negative signs in (10) are to be alternately used in the same way as in equation (7b).

Case II: The sinh-Type Condenser

In this case we have from equations (2) and (4)

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \alpha \tanh \alpha V \left(\frac{dV}{dt} \right)^2 = \frac{V_0 - V}{L C_0} \operatorname{sech} \alpha V, \quad (11)$$

which can be put into a linear form by the substitution $Z = (dV/dt)^2$, to give

$$\frac{dZ}{dV} + 2 \alpha (\tanh \alpha V) Z = \frac{2}{L C_0} (V_0 - V) \operatorname{sech} \alpha V,$$

with the complete solution

$$Z = \lambda \operatorname{sech}^2 \alpha V + \frac{2}{\alpha^2 L C_0} \operatorname{sech}^2 \alpha V [\cosh \alpha V + \alpha (V_0 - V) \sinh \alpha V]. \quad (12)$$

With the initial conditions at $t = 0$, $V = 0$ and $dV/dt = 0$, i. e., $Z = 0$, we get

$$\lambda = -\frac{2}{\alpha^2 L C_0}$$

and

$$\frac{dV}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{L C_0}} \frac{1}{\alpha} \operatorname{sech} \alpha V [(\cosh \alpha V - 1) + \alpha (V_0 - V) \sinh \alpha V]^{1/2}. \quad (13)$$

The positive and negative signs are to be treated in the same way as in (7b). Equation (13) gives, on normalization, the charging waveform, starting with $t = 0$, for the voltage across the condenser.

$$\frac{t}{\tau} = \int_0^x \cosh x [(\cosh x - 1) + (x_0 - x) \sinh x]^{-1/2} dx, \tag{14}$$

where τ , x and x_0 have the same significances as in (9).

The normalized charging current through the sinh-type condenser is given by (4) and (13) as
$$i = \pm i_0 [(\cosh x - 1) + (x_0 - x) \sinh x]^{1/2}, \tag{15}$$

with the same value of i_0 as in equation (10).

The signs in the expression (15) for current i are to be used in the same way as in (10).

The Discharging of the Condenser

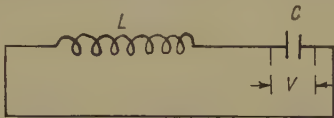


Figure 2
The discharging circuit.

KIRCHHOFF'S equation of the circuit of Figure 2 for the case of discharge gives

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + V = 0 \tag{16}$$

with usual significances of the symbols.

Case I: The Exponential Condenser

During discharge, V is capable of assuming both signs. Hence using (3), (16) can be written as

$$L C_0 e^{\alpha |V|} \left\{ \frac{d^2V}{dt^2} + \alpha V \frac{d^2|V|}{dt^2} + 2\alpha \frac{dV}{dt} \cdot \frac{d|V|}{dt} + \alpha^2 V \left(\frac{d|V|}{dt} \right)^2 \right\} + V = 0, \tag{16a}$$

where $|V|$ is the absolute value of V . This equation remains unchanged if V is replaced by $-V$ and it will be sufficient for our purpose if we deal with the magnitude of V only. The solution of (16a) can then be obtained by the method previously outlined. With the initial conditions at $t = 0$, $V = V_0$ and $dV/dt = 0$ (as the current is zero initially), we get

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{L C_0}} \frac{e^{-\alpha V}}{(1 + \alpha V)} \\ & \times [e^{\alpha V_0} (\alpha^2 V_0^2 + 1 - \alpha V_0) - e^{\alpha V} (\alpha^2 V^2 + 1 - \alpha V)]^{1/2}, \end{aligned} \right\} \tag{16b}$$

which can be normalized to

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{\tau} \cdot \frac{e^{-x}}{(1+x)} [e^{x_0} (x_0^2 + 1 - x_0) - e^x (x^2 + 1 - x)]^{1/2}, \quad (17)$$

where x , x_0 and τ have the same significance as in (9) and the positive and negative signs are to be used as before. Differentiating equation (17), we get

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \pm \frac{1}{\tau} [e^{x_0} (x_0^2 + 1 - x_0) - e^x (x^2 + 1 - x)]^{1/2} \\ &\quad \times \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-x}}{(1+x)} \right) - \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{e^{-x} (x^2 + x)}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Hence at $t = 0$, i. e., $x = x_0$,

$$\left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=0} = - \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)^2} (x_0^2 + x_0),$$

and, therefore

$$\left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=0}$$

is negative. Thus at $t = 0$, the voltage has a maximum and it falls with increasing time until a minimum is reached. Taking, therefore, the negative sign for dx/dt and using the initial condition, at $t = 0$, $x = x_0$, we get

$$\frac{t}{\tau} = I(x_0) - I(x), \quad (18)$$

where

$$I(x_0) = \int_0^{x_0} e^x (1+x) [e^{x_0} (x_0^2 + 1 - x_0) - e^x (x^2 + 1 - x)]^{-1/2} dx \quad (18a)$$

and

$$I(x) = \int_0^x e^x (1+x) [e^{x_0} (x_0^2 + 1 - x_0) - e^x (x^2 + 1 - x)]^{-1/2} dx. \quad (18b)$$

The above expressions are valid from time $t = 0$ until the next minimum for x is attained. However, as we shall see later, x is periodic in time; so the above treatment remains valid for any time between a maximum and the next consecutive minimum for x . Equation (18), on numerical integration, gives the discharge shape of the condenser voltage in the appropriate range.

The normalized discharge current through the exponential condenser is, from (3) and (17)

$$i = \pm i_0 [e^{x_0} (x_0^2 + 1 - x_0) - e^x (x^2 + 1 - x)]^{1/2} \quad (19)$$

with the same value of i_0 as before and x considered in magnitude only.

After $t = 0$ and before reaching the next minimum for x , dx/dt is negative. Therefore, the current is also negative in that range and it becomes positive

only after the voltage crosses its minimum. This is because the direction of current through the condenser during discharge is opposite to that during charge (Figure 3) at $t = 0$.

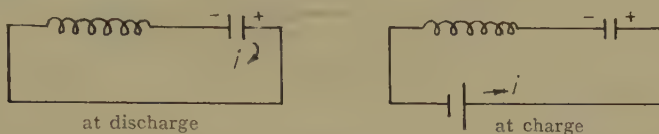


Figure 3

Diagram showing the directions of current at $t = 0$ for charge and discharge.

Case II: The sinh-Type Condenser

The normalized expression for dx/dt in the case of the sinh-type condenser can be obtained from (4) and (16). With the initial conditions, at $t = 0$, $V = V_0$ (i. e., $x = x_0$) and $dV/dt = 0$ (i. e., $dx/dt = 0$), this becomes

$$\frac{dx}{dt} = \pm \tau \operatorname{sech} x [(\cosh x - \cosh x_0) - (x \sinh x - x_0 \sinh x_0)]^{1/2} \quad (20)$$

where x , x_0 and τ have the usual significance. Differentiating (20), we get

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \pm \tau \operatorname{sech} x \tanh x [(\cosh x - \cosh x_0) - (x \sinh x - x_0 \sinh x_0)]^{1/2} \times \left(\frac{dx}{dt} \right) - \frac{\tau^2 x \operatorname{sech} x}{2}.$$

Hence at $t = 0$,

$$\left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=0} = -\frac{\tau^2}{2} x_0 \operatorname{sech} x_0$$

and, therefore

$$\left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=0}$$

is negative.

Thus at $t = 0$, the voltage has a maximum and it falls with increasing time till a minimum is reached. Taking, therefore, the negative value of dx/dt and using the initial conditions, we get

$$\frac{t}{\tau} = I(x_0) - I(x), \quad (21)$$

where

$$I(x_0) = \int_0^{x_0} \cosh x [(\cosh x - \cosh x_0) - (x \sinh x - x_0 \sinh x_0)]^{-1/2} dx$$

and

$$I(x) = \int_0^x \cosh x [(\cosh x - \cosh x_0) - (x \sinh x - x_0 \sinh x_0)]^{-1/2} dx.$$

The above expressions are valid from time $t = 0$ till the next minimum for x is reached. Here again it will be shown that x is periodic in t . So that the above treatment remains valid for any time between a maximum and the next minimum for x . Equation (21), when numerically integrated, gives the shape of the condenser voltage for discharge in the appropriate range.

The normalized discharge current through the sinh-type condenser is given by (4) and (20) as follows:

$$i = \pm i_0 [(\cosh x - \cosh x_0) - (x \sinh x - x_0 \sinh x_0)]^{1/2} \quad (22)$$

where i_0 has the same value as before.

Discussion on the Charging of the Condenser

A close examination of the integrands in equations (8) and (14) shows that they are singular at $x = 0$ and for another value of $x = x_1$ defined for the exponential condenser by,

$$1 + e^{x_1} (x_1 x_0 - x_1^2 - 1 + x_1) = 0 \quad (23)$$

and for the sinh-type condenser by,

$$(\cosh x_1 - 1) + (x_0 - x_1) \sinh x_1 = 0. \quad (24)$$

It is, therefore, necessary to examine the convergence of the integrals in equations (8) and (14) at $x = 0$ and at $x = x_1$. Let $\Phi(x)$ denote the integrand in any of the two equations (8) and (14). Then near the singularity at $x = 0$, the integrand in both cases can be written as

$$\Phi(x) = x^{-1/2} (a + b x + c x^2 + \dots)$$

where $a, b, c \dots$ are constants and x is small but positive. Hence $\int \Phi(x) dx$ exists at the lower limit $x = 0$. In a similar fashion, it can be shown that near the singularity at $x = x_1$, we can write in both cases

$$\Phi(z) = z^{-1/2} (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \dots)$$

where again $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ are constants and $z = x_1 - x$ is small but positive. Hence the integral $\int \Phi(x) dx$ also exists at the upper limit, viz., at $x = x_1$. The importance of the existence of $I(x_1)$ lies in the fact, that if $I(x_1)$ were infinite, the charging would be aperiodic. The above treatment shows that such is not the case.

It is easily seen from equations (23) and (24) that for x greater than x_1 , $\Phi(x)$ is imaginary. So, physically, there can be no normalized voltage greater than x_1 . Hence x_1 is the maximum voltage that can develop across the condenser in the charging process. This is further substantiated by the fact that at $x = x_1$,

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

in both cases [equations (7b) and (13)]; further

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k_1 e^{-x_1}}{(1 + x_1)} (x_0 - x_1) \tag{25a}$$

for the exponential condenser and

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k_2 (\operatorname{sech} x) (x_0 - x_1) \tag{25b}$$

for the sinh-type condenser, k_1, k_2 being constants. We shall eventually see that x_1 is always greater than x_0 . Thus at $x = x_1$, d^2x/dt^2 is negative in both cases, showing a maximum at $x = x_1$.

The value of x_1 depends on the line voltage [equations (23) and (24)]. This has been calculated by the Newton-Raphson method for some representative values of the line voltage, and the results are tabulated in Table 1.

Table 1

x_0	x_1	
	Exponential	sinh-Type
1	1.477	1.688
4	4.793	4.987
10	10.909	11.000
100	100.990	101.000

For higher values of the line voltage, x_1 approaches the limit $x_0 + 1$ (see Figures 4 and 5), which means that at higher *dc* voltages the amplitude of

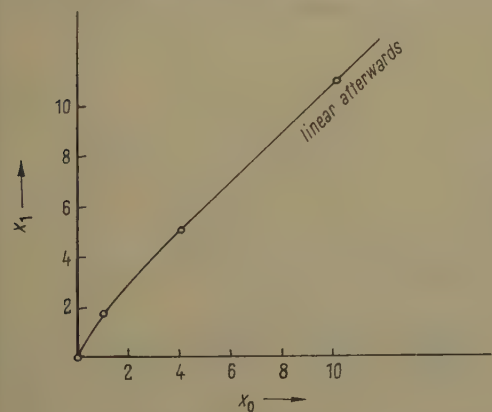


Figure 4

Maximum condenser voltage (x_1) versus line voltage (x_0) for the exponential condenser (for charging).

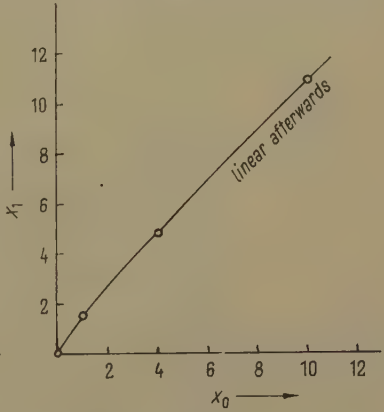


Figure 5

Maximum condenser voltage (x_1) versus line voltage (x_0) for the sinh-type condenser (for charging).

oscillation is practically equal to the line voltage. At lower line voltages, however, the percentage increase of maximum voltage over the line voltage is greater. Comparing with the linear case in which $x_1/x_0 = 2$ for all values of x_0 , we see that x_1/x_0 is far less in the case of a non-linear condenser. This is a result of the strong nonlinearity. The capacity value rises so much with increasing voltage that the condenser cannot afford to have a large voltage across it, if the circuit equation [equation (2)] is to be satisfied. For exactly the same reason x_1/x_0 is greater in the sinh case than in the exponential case because $\sinh x/x$ is less than e^x and hence the non-linearity of the sinh-type condenser is less pronounced than that of the exponential one.

From equation (10), differentiating the absolute value of the current through the exponential condenser, we get

$$\frac{d|i|}{dx} = \frac{i_0}{2} [1 + e^x (x x_0 - x^2 - 1 + x)]^{-1/2} e^x (x_0 - x) (x + 1) = 0$$

at $x = x_0$ and

$$\begin{aligned} \frac{d^2|i|}{dx^2} &= -\frac{i_0}{4} [1 + e^x (x x_0 - x^2 - 1 + x)]^{-3/2} e^{2x} (x + 1)^2 (x_0 - x)^2 \\ &\quad + \frac{i_0}{2} [1 + e^x (x x_0 - x^2 - 1 + x)]^{-1/2} \\ &\quad \times e^x [(x + 1) (x_0 - x) + (x_0 - 2x - 1)], \end{aligned}$$

which is negative at $x = x_0$. Similarly, for the sinh-type condenser, we get from (15)

$$\frac{d|i|}{dx} = \frac{i_0}{2} [(\cosh x - 1) + (x_0 - x) \sinh x]^{-1/2} (x_0 - x) \cosh x = 0$$

at $x = x_0$ and

$$\begin{aligned} \frac{d^2|i|}{dx^2} &= -\frac{i_0}{4} [(\cosh x - 1) + (x_0 - x) \sinh x]^{-3/2} (x_0 - x)^2 \cosh^2 x \\ &\quad + \frac{i_0}{2} [(\cosh x - 1) + (x_0 - x) \sinh x]^{-1/2} \\ &\quad \times \{ (x_0 - x) \sinh x - \cosh x \} \end{aligned}$$

which is also negative at $x = x_0$. Hence for both the types of condenser $|i|$ has a maximum at $x = x_0$, the line voltage. At $x = x_0$, therefore, i has a maximum if dx/dt is positive and has a minimum if dx/dt is negative. The situation is shown graphically in Figure 6 as well as in Figures 9 to 16. In Figure 6, both the points A and B correspond to $x = x_0$; however i has a maximum at A and has a minimum at B .

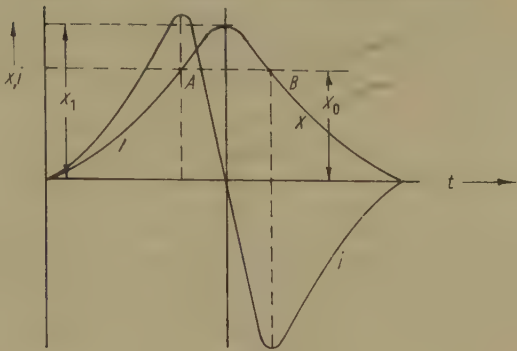


Figure 6
Diagram showing typical charging waveforms.

The values of the maximum current for different line voltages are tabulated in Table 2 and their relation is shown in Figure 7.

Table 2

x_0	i_{max}	
	Exponential	sinh-Type
1	1.000	0.737
4	12.837	5.130
10	445.20	104.94
100	5.188×10^{22}	3.64×10^{21}

Whereas in the linear circuit the maximum current is proportional to the line voltage, strong non-linearity is observed in the present case between the maximum current and the line voltage (Figure 7).

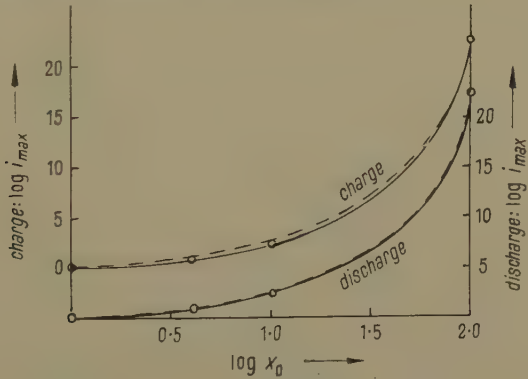


Figure 7
— sinh; --- exponential.

Maximum current through the condenser (i_{max}) versus line voltage (x_0) (for both types of condenser at charge and discharge). [Plotted on a log-log scale.]

We have seen previously that from $t = 0$, the voltage rises from zero and reaches a maximum at $x = x_1$. Due to the convergence of the integral

$$\int_0^{x_1} \Phi(x) dx,$$

this maximum voltage is reached in a finite time, say $I(x_1)$. After this time, the voltage must fall, since as previously proved, x has a maximum at x_1 and hence until the voltage falls to zero again, we have to use the negative value for dx/dt in equations (7b) and (13). In this range, the time equation becomes

$$\frac{t}{\tau} \Big|_{I(x_1)}^{t/\tau} = \int_{x_1}^{x < x_1} -\Phi(x) dx = \int_0^{x_1} \Phi(x) dx - \int_0^x \Phi(x) dx$$

or

$$\frac{t}{\tau} - I(x_1) = I(x_1) - I(x). \quad (26)$$

Equation (26) is the equation of symmetry which expresses the fact that equal voltages are reached at equidistant times from the time of maximum voltage, i. e., that the waveform of x versus t is symmetrical about the ordinate $t = I(x_1)$. We can, therefore, plot x versus t up to the maximum for x and then fold the curve about the ordinate $t = I(x_1)$ to get the other symmetrical half. This procedure, when repeated at each zero of x , gives x as a function of time. Obviously x becomes periodic in time with period $T = 2I(x_1)$. This is to be expected since there is no dissipation of energy in the circuit.

The values of the normalized time-period, found by numerical integration, are tabulated in Table 3 and plotted in Figure 8.

Table 3

x_0	T	
	Exponential	sinh-Type
1	18.286	11.225
4	137.34	43.781
10	4073.2	867.50
100	4.096×10^{23}	3.028×10^{22}

Whereas in a linear circuit, the period is independent of the line voltage, in this case we observe that the former is strongly dependent on the latter as is shown in Figure 8. In Figure 8, for discharge, the values of the half-period are plotted instead of the full period, but in a logarithmic plot, this merely means a change of origin.

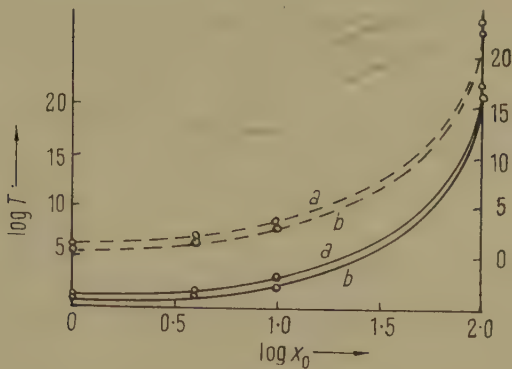


Figure 8

— sinh; ---- exponential; a charge; b discharge.

Period of oscillation versus line voltage (for both the types of condensers at charge and discharge).
[Plotted on a log-log scale.]

Discussion on the Discharging of the Condenser

The convergence of the integrals (18) and (21) at $x = x_0$ and at $x = -x_0$ can be proved exactly similarly as we have done for the charging case.

It has already been proved that x_0 , the line voltage, is the maximum voltage across the condenser during discharge, i. e., that there is no ‘over-shooting’. In a similar fashion it can be shown that the minimum voltage across the condenser during discharge is $-x_0$. The result is quite analogous to the linear case.

That the discharge is periodic can be proved exactly as in the charging case; but here the period is $4 I(x_0)$, for to make one period complete the voltage has to fall from x_0 to zero and further to $-x_0$ and then again rise to x_0 in the reverse order. The periods of oscillation, T , at discharge have been calculated by numerical integration for some representative values of x_0 and have been tabulated in Table 4. A plot of this against x_0 has been shown in Figure 8.

Table 4

x_0	T	
	Exponential	sinh-Type
1	14.000	9.517
4	60.144	21.688
10	1276.60	258.12
100	9.282×10^{22}	2.895×10^{21}

It can be easily proved as in the case of charging that the voltage waveform at discharge is symmetrical about both the ordinates at $t = 0$ and at $t = 2 I(x_0)$.

This waveform is further symmetrical about the axis of abscissae $x = 0$. This symmetry makes the average voltage in a full cycle zero which is essential in discharge.

A study of equations (19) and (22) shows that the magnitude of the current is a maximum at $x = 0$ and has the value

$$i_0 e^{x_0/2} \sqrt{x_0^2 + 1 - x_0}$$

for the exponential condenser and the value

$$i_0 \sqrt{x_0 \sinh x_0 - \cosh x_0}$$

for the sinh-type condenser. The results are shown graphically in Figures 9 to 16.

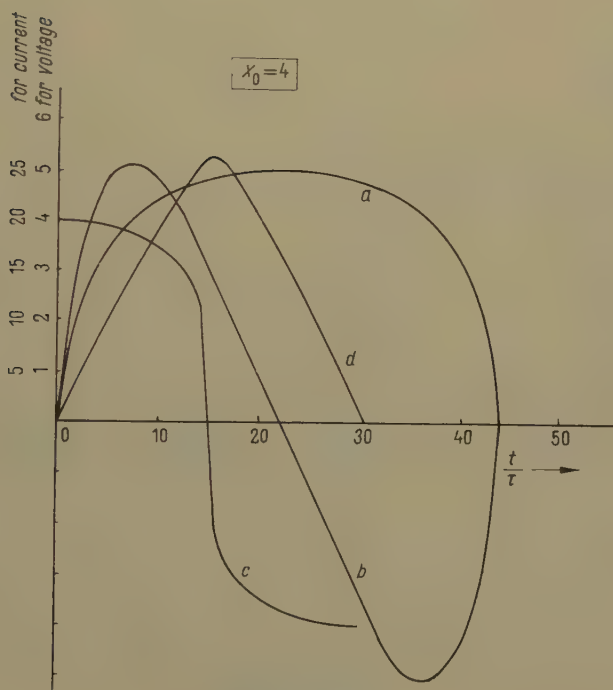
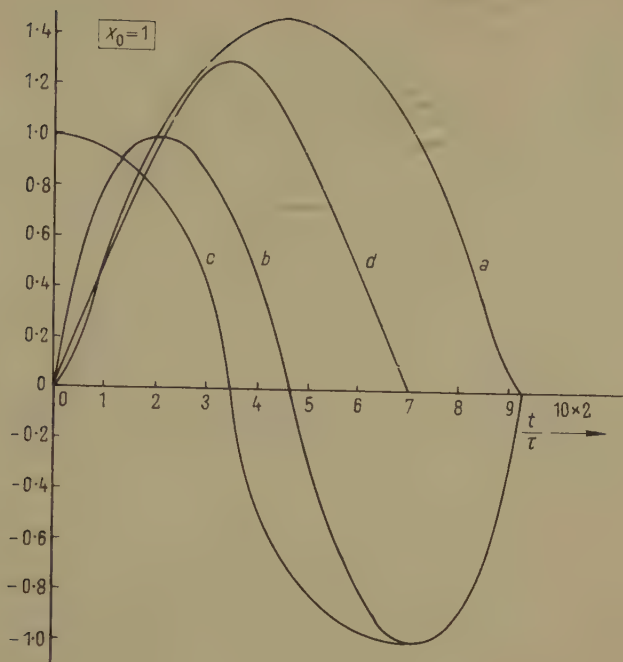
In Figures 9, 10, 11 and 12 the waveforms of the voltage and the current for the exponential condenser for different values of the line voltage have been plotted by numerical evaluation of the integrals in equations (8), (10), (18) and (19). The waveform for a complete cycle is shown for charging and for a half-cycle for discharging. The close resemblance of the voltage waveforms to square waveforms is remarkable for higher line voltages.

In Figures 13, 14, 15 and 16 the waveforms of the voltage and the current for the sinh-type condenser for different values of line voltage have been plotted by numerical evaluation of the integrals in equations (14), (15), (21) and (22). The waveform for a complete cycle is shown for charging and for a half-cycle for discharging. The close resemblance of the voltage waveforms to square waveforms is again remarkable for higher line voltages.

Possible Applications

Apart from their theoretical interest, the results obtained here may have some practical utility. For example it is seen from Figures 11, 12, 15 and 16 that the voltage waveform approaches (both at charge and discharge) a square waveform for comparatively high line voltages, especially in the case of the exponential condenser. The effect is best observed at $x_0 = 100$, the highest line voltage considered. This, therefore, indicates a simple way of generating square waveforms of voltage by the use of non-linearity, provided that the voltage applied is not so high as to destroy the inherent non-linearity.

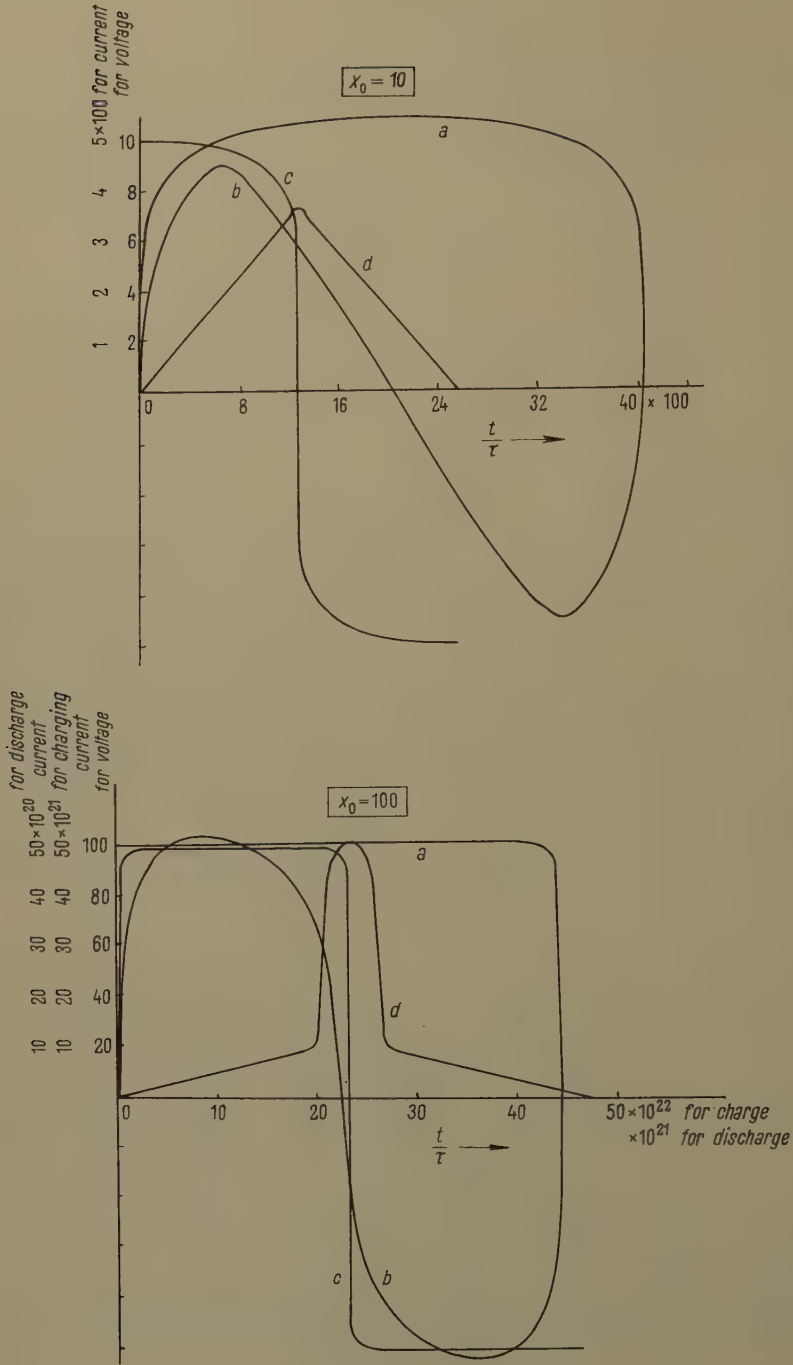
Figures 10, 11 and 14 and to some extent Figures 9 and 15 show a current which approaches a triangular waveform. At $x_0 = 100$, however, in both cases, the departure from the triangular waveform is prominent. At this voltage the current waveform for charging is like a square wave. These may, therefore, be utilized to produce current waveforms of the types mentioned.



Figures 9 and 10

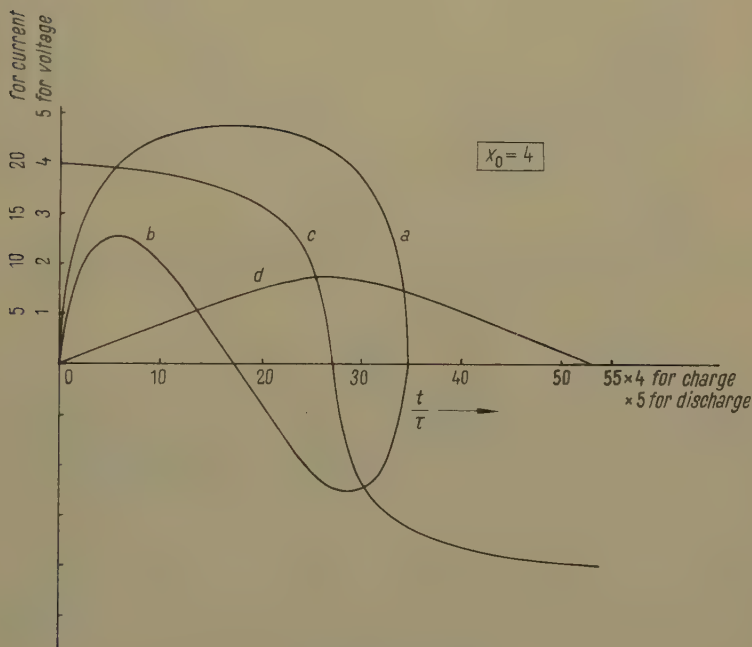
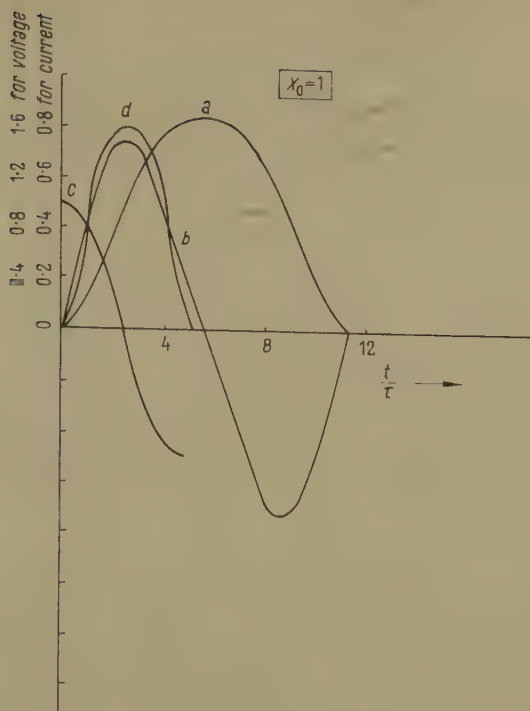
a voltage at charge; b current at charge; c voltage at discharge; d current at discharge.

Diagrams showing the voltage and current waveforms for the exponential capacitor at charge and discharge for $x_0 = 1$ and 4 respectively.



Figures 11 and 12

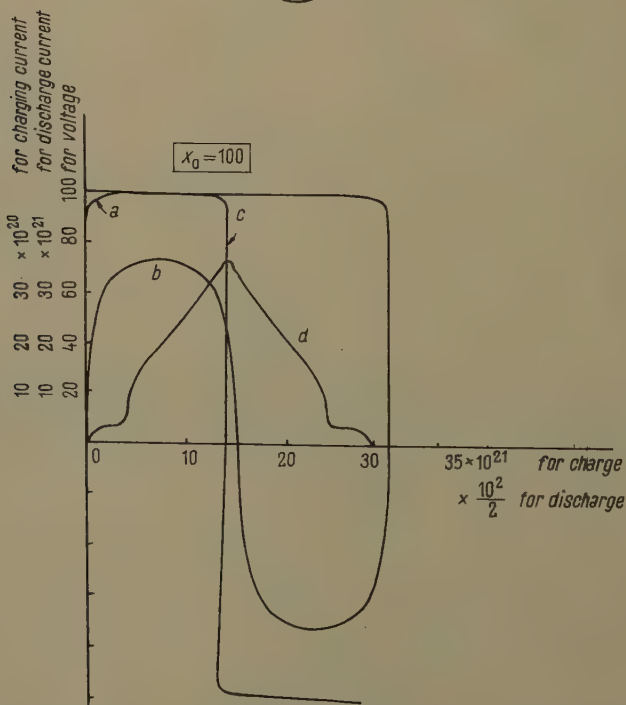
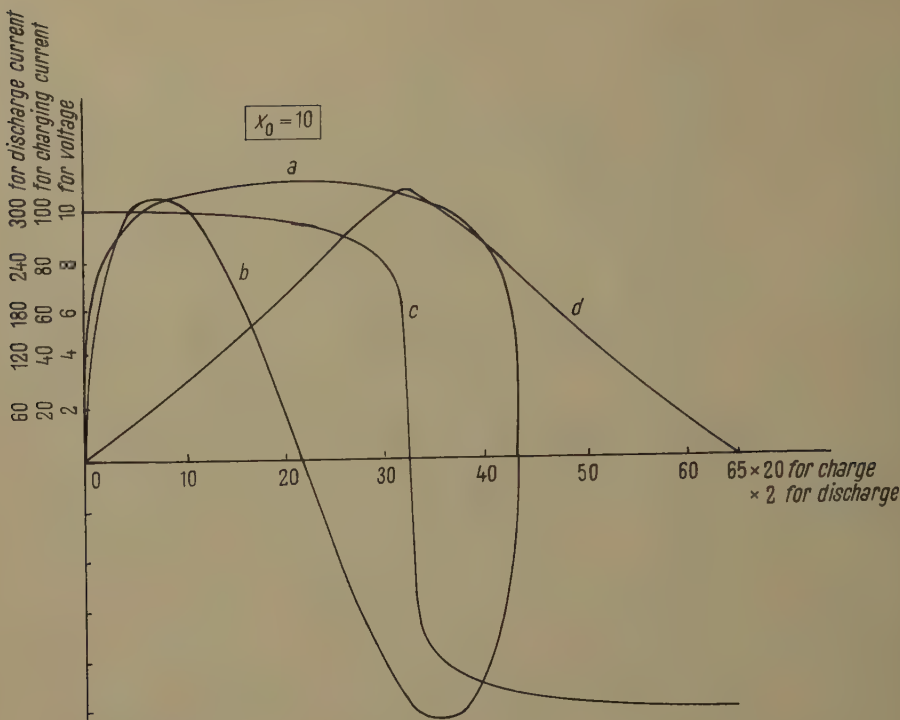
a voltage at charge; *b* current at charge; *c* voltage at discharge; *d* current at discharge.
Diagrams showing the voltage and current waveforms for the exponential condenser at charge and discharge for $x_0 = 10$ and 100 respectively.



Figures 13 and 14

a voltage at charge; *b* current at charge; *c* voltage at discharge; *d* current at discharge.

Diagrams showing the voltage and current waveforms for the sinh-type condenser at charge and discharge for $x_0 = 1$ and 4 respectively.



Figures 15 and 16

a voltage at charge; *b* current at charge; *c* voltage at discharge; *d* current at discharge.
 Diagrams showing the voltage and current waveforms for the sinh-type condenser at charge and discharge for $x_0 = 10$ and 100 respectively.

The dependence of the period on the line voltage can probably be used for producing frequency modulation, although this will be accompanied by amplitude modulation. The modulation will not be linear unless the applied voltage is small.

Acknowledgement

The author is indebted to Dr. B.V.GOKHALE for helpful discussion and criticism, to Prof. S.GUPTA for his kind interest in the work and to Prof. H.N.BOSE for suggesting some applications. Sincerest thanks are due to the authorities of the Indian Statistical Institute and especially to Mr. S.K.MITRA and his co-workers at the computational laboratory, Indian Statistical Institute, for the numerical evaluation of some integrals in connection with the charging of the exponential condenser.

REFERENCES

- [1] J.R.MACDONALD, *Static Space Charge Effects in the Diffuse Double Layer*, J. Chem. Phys. 22, 1317-1322 (1954).
- [2] J.R.MACDONALD, *A-C Polarisation in Semi-Conductors*, Phys. Rev. 92, 4-17 (1953).
- [3] J.R.MACDONALD, *Capacitance and Conductance Effects in Photoconducting Alkali Halide Crystals*, J. Chem. Phys. 23, 275-294 (1955).
- [4] G.JAFFE and C.Z.LEMAY, *Polarisation in Liquid Di-Electrics*, J. Chem. Phys. 21, 920-928 (1953).
- [5] W.SHOCKLEY, *The Theory of the p-n Junctions in Semiconductors and p-n Junction Transistors*, Bell Sys. tech. J. 28, 435-489 (1949).
- [6] J.R.MACDONALD and M.K.BRACHMAN, *Charging and Discharging of Non-Linear Capacitors*, Proc. I.R.E. 43, 71-78 (1955).

Zusammenfassung

MACDONALD [1] hat gezeigt, dass die Kapazität eines Kondensators mit einem Halbleiter als Dielektrikum proportional zu

$$\frac{\sinh \alpha V}{\alpha V}$$

variieren kann. V bedeutet die über dem Kondensator liegende Spannung, und α ist eine Konstante.

Im folgenden wird eine Schaltung untersucht, bei der eine derartige Kapazität in Serie zu einer linearen, verlustlosen Induktivität liegt. Eine Methode wird angegeben, nach der Strom und Spannung als Funktion der Zeit für zwei Fälle berechnet werden:

1. Zur Zeit $t = 0$ wird die Kapazität über die Induktivität durch einen Spannungsschoss aufgeladen.

2. Die Kapazität ist zur Zeit $t = 0$ aufgeladen und entlädt sich über die Induktivität.

Die Schwingungsdauer, die Spannungsmaxima über dem Kondensator sowie die Maximalwerte des Stromes werden in Abhängigkeit von der angelegten

Gleichspannung untersucht. In diesem Zusammenhang wird auf die Möglichkeit hingewiesen, einfache Generatoren für rechteckförmige und dreieckförmige Spannungen herzustellen. Die hier abgeleiteten Ergebnisse werden mit Rechnungen verglichen, die für einen Kondensator ausgeführt wurden, dessen Kapazität wie $\exp(\alpha V)$ von der Spannung abhängt. Derartige Kapazitäten lassen sich mit einem Verstärker grosser Verstärkung, einer kapazitiven Rückkopplung und einem Netzwerk, dessen Ausgangsspannung exponentiell von der Eingangsspannung abhängt, realisieren [6].

(Received: November 26, 1956.)

Über näherungsweise Auflösung von Systemen homogener linearer Gleichungen

Von ALEXANDER OSTROWSKI, Basel¹⁾

1. Die Lösung des linearen homogenen Systems

$$S \xi' = 0, \quad (1)$$

wo S eine $n \times n$ -Matrix mit verschwindender Determinante ist und ξ als ein n -dimensionaler (Zeilen-) Vektor gesucht wird, kann nach den Vorschriften der Determinantentheorie ausgeführt werden, entweder durch die Aufstellung geeigneter Zeilen von Unterdeterminanten von S oder durch schrittweise Reduktion von S auf eine kanonische Form, in der eine Reihe von Zeilen aus lauter Nullen besteht.

Da aber in der numerischen Praxis sehr oft die Determinante von S nicht genau verschwindet, sondern nur «sehr klein» ist, ergeben sich dabei gewisse Schwierigkeiten und Unsicherheiten, die in zusammenfassenden Darstellungen über numerische Behandlung linearer Gleichungen eher nur flüchtig berührt werden. Es dürfte daher der im folgenden mitzuteilende Satz von Interesse sein, der eine allgemeine Methode zur Aufstellung solcher «angenäherter Lösungen» enthält sowie eine Handhabe zur Beurteilung des gemachten Fehlers liefert. Wird nämlich anstelle der singulären Matrix S die «gestörte» Matrix $S + A$ betrachtet, wo $A = (a_{\mu\nu})$ eine $n \times n$ -Matrix mit gegen 0 strebenden Elementen $a_{\mu\nu}$ ist, so wähle man einen festen n -dimensionalen Vektor η und betrachte die Gleichung

$$(S + A) \xi' = \eta'. \quad (2)$$

Verschwindet die Determinante von $S + A$ nicht, so wird dann «im allge-

¹⁾ Mathematische Anstalt der Universität Basel.

meinen » $|\xi|$ ins Unendliche gehen, zugleich wird der normierte Vektor $\xi/|\xi|$ sich von einem geeigneten Lösungsvektor von (1) um

$$O\left(\sqrt{\sum_{\mu, \nu} |a_{\mu\nu}|^2}\right)$$

unterscheiden.

2. Genauer lautet unser Ergebnis wie folgt:

Satz 1. Es sei S eine $n \times n$ -Matrix vom Rang $n - k$, $1 \leq k \leq n - 1$. Es sei $A = (a_{\mu\nu})$ eine $n \times n$ -Matrix mit variablen Elementen $a_{\mu\nu}$, die gegen 0 streben, derart, dass dabei die Determinante von $S + A$ von 0 verschieden ist. Es sei $\eta \neq 0$ ein konstanter Vektor, für den die Gleichung

$$S \zeta' = \eta' \quad (3)$$

keine Lösung hat. Dann gibt es zu einem Lösungsvektor ξ von (2) einen (variablen) Lösungsvektor π von (1), derart, dass

$$\frac{\xi}{|\xi|} = \pi + O\left(\sqrt{\sum_{\mu, \nu} |a_{\mu\nu}|^2}\right) \quad (4)$$

gilt²⁾.

3. Beweis. Bekanntlich lassen sich zwei nicht singuläre konstante $n \times n$ -Matrizen B, C derart finden, dass

$$BSC \equiv S_0 = \begin{pmatrix} O_k & O \\ O & E_{n-k} \end{pmatrix} \quad (5)$$

gilt, wo O_k eine aus lauter Nullen bestehende $k \times k$ -Matrix und E_{n-k} die Einheitsmatrix der Ordnung $n - k$ ist, während die beiden Matrizen O aus lauter Nullen bestehen. Setzen wir dann

$$BAC = A_0 = (a_{\mu\nu}^{(0)}), \quad (6)$$

$$C^{-1} \zeta' = \zeta'_0, \quad C^{-1} \xi' = \xi'_0, \quad B \eta' = \eta'_0, \quad (7)$$

so gehen die Gleichungen (1) und (2) über in

$$S_0 \zeta'_0 = 0, \quad (1^*)$$

$$(S_0 + A_0) \xi'_0 = \eta'_0. \quad (2^*)$$

²⁾ Die Bedingung, die im obigen Satz dem Vektor η auferlegt wurde, lässt sich bekanntlich auch so formulieren, dass der Vektor η nicht auf der gesamten Schar der linksseitigen Nullvektoren von S senkrecht stehen darf. In der numerischen Praxis lässt sich dieses Kriterium allerdings nur sehr selten verwenden, so dass man eventuell für η nacheinander n linear unabhängige Vektoren einsetzen wird, zum Beispiel die n Koordinaten-Einheitsvektoren.

Setzen wir dann

$$\eta_0 = (y_1, \dots, y_n), \quad \xi_0 = (x_1, \dots, x_n), \quad (8)$$

so gilt nach Voraussetzung des Satzes für ein geeignetes κ zwischen 1 und k :

$$y_\kappa \neq 0, \quad 1 \leq \kappa \leq k. \quad (9)$$

4. Wir setzen ferner

$$(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = \sigma, \quad (0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) = \varrho, \quad (10)$$

so dass $\xi_0 = \sigma + \varrho$ ist. Offenbar ist $S_0 \sigma' = 0$, $S_0 \xi_0' = \varrho$. Um $A_0 \xi_0'$ geeignet darzustellen, führen wir allgemein den der ν -ten Kolonne von A_0 entsprechenden Vektor C_ν ein, so dass

$$C'_\nu = (a_{1\nu}^{(0)}, \dots, a_{n\nu}^{(0)}) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

ist. Dann können wir (2*) in der Form

$$(S_0 + A_0) \xi_0' = \sum_{\nu=1}^n x_\nu C_\nu + \varrho' = \eta_0' \quad (11)$$

schreiben. Vergleichen wir rechts und links in (11) die κ -te Komponente, so folgt

$$y_\kappa = \sum_{\nu=1}^n a_{\kappa\nu}^{(0)} x_\nu,$$

da $\kappa \leq k$ ist, und daher

$$|y_\kappa| \leq |\xi_0| \sqrt{\sum_{\nu=1}^n |a_{\kappa\nu}^{(0)}|^2}. \quad (12)$$

5. Setzen wir daher für die Norm $|A_0|_2$ von A_0 :

$$\alpha = |A_0|_2 = \sqrt{\sum_{\mu, \nu} |a_{\mu\nu}^{(0)}|^2}, \quad (13)$$

so folgt wegen (9)

$$\frac{1}{|\xi_0|} \leq \frac{\alpha}{|y_\kappa|}, \quad |\xi_0| \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Dividieren wir nun die rechtsseitige Relation in (11) durch $|\xi_0|$, so ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{x_\nu}{|\xi_0|} C_\nu + \frac{\varrho'}{|\xi_0|} = \frac{\eta_0'}{|\xi_0|}, \quad (15)$$

$$\frac{|\varrho|}{|\xi_0|} \leq \frac{|\eta_0|}{|\xi_0|} + \sum_{\nu=1}^n \frac{|x_\nu|}{|\xi_0|} |C_\nu|,$$

und daraus, da $\sum_{\nu=1}^n |C_\nu|^2 = \alpha^2$ ist, nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

wegen (14)

$$\frac{|\varrho|}{|\xi_0|} \leq \frac{|\eta_0|}{|\xi_0|} + \alpha \leq \alpha \left(\frac{|\eta_0|}{|\xi_0|} + 1 \right). \quad (16)$$

Damit gilt nunmehr

$$\xi_0 = \sigma + \varrho = \sigma + O(|\xi_0| \alpha). \quad (17)$$

6. Aus (17) folgt weiter wegen (7) $\xi' = C\sigma' + C\varrho'$, und daher, wenn $C\sigma' = |\xi| \pi'$ gesetzt wird – unter π eine geeignete Lösung von (1) verstanden –,

$$\xi' = |\xi| \pi' + C\varrho' = |\xi| \pi' + O(|\xi_0| \alpha). \quad (18)$$

Aus (7) folgt aber

$$|\xi_0| = O(|\xi|),$$

so dass aus (18) durch Division mit $|\xi|$ endlich

$$\frac{\xi}{|\xi|} = \pi + O(\alpha) \quad (19)$$

folgt. Setzen wir nun

$$|A|_2 = \sqrt{\sum_{\mu, \nu} |a_{\mu\nu}|^2}$$

und bilden in analoger Weise $|B|_2$ und $|C|_2$, so folgt bekanntlich³⁾ aus (6)

$$\alpha = |A_0|_2 \leq |B|_2 |A|_2 |C|_2$$

und daher für ein konstantes $c = |B|_2 |C|_2$:

$$\alpha \leq c |A|_2.$$

Tragen wir dies in (19) ein, so ergibt sich die Behauptung (4), und Satz 1 ist bewiesen.

7. Der Vektor π in (4) kann «wesentlich variabel» sein, das heisst braucht auch nach geeigneter Normierung nicht gegen einen konstanten Lösungsvektor von (1) zu konvergieren. Man betrachte zum Beispiel für $u \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$ die Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (S + A) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\eta = (1, 1, 1)$ ergibt sich $\xi = (1/u, 1/v, 1)$,

$$\frac{\xi}{|\xi|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + \frac{u^2}{v^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1 + v^2 + \frac{v^2}{u^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}}} \right). \quad (20)$$

³⁾ Vergleiche zum Beispiel A. OSTROWSKI, *Über Normen von Matrizen*, Math. Z. 63, pp. 3 und 13 (1955).

Streben nun u und v derart nach 0, dass für geeignete Teilfolgen sowohl $u/v \rightarrow 0$ als auch $v/u \rightarrow 0$ gilt, so ergeben sich in der Grenze als zugehörige Häufungsvektoren von (20) sowohl $(1, 0, 0)$ als auch $(0, 1, 0)$.

8. In dem obigen Beispiel hängt A analytisch von *zwei* gegen 0 strebenden Parametern ab. Handelt es sich dagegen nur um *einen* analytisch eingehenden Parameter, so konvergiert π nach geeigneter Normierung in der Tat gegen einen *konstanten Lösungsvektor* von (1) von der Länge 1. Genauer:

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 seien die $a_{\mu\nu}$ analytische Funktionen eines Parameters t , regulär in $t = 0$. Setzt man dann*

$$\frac{t}{|t|} = \varepsilon, \quad (21)$$

so gilt für den Vektor π in (4) mit einem geeigneten natürlichen j

$$\varepsilon^j \pi = \tau + O(t), \quad (22)$$

wo τ ein konstanter Lösungsvektor von (1) von der Länge 1 ist.

9. *Beweis.* Wird (2) aufgelöst, so erhält man für den Vektor ξ , nach wachsenden Potenzen von t entwickelt,

$$\xi = t^{-j} (U + O(t)), \quad (23)$$

wo U ein von t unabhängiger konstanter Vektor ist. Der Exponent j ist hier *positiv*, da $|\xi|$ ins Unendliche strebt. Daraus folgt weiter

$$\frac{\xi}{|\xi|} = \varepsilon^{-j} (\tau + O(t)), \quad (24)$$

wo $U/|U| = \tau$ gesetzt ist. Andererseits folgt aus unseren Annahmen, dass $a_{\mu\nu} = O(t)$, $|A|_2 = O(t)$ ist; und (22) folgt nunmehr aus (24) und (4).

10. In der Praxis ist wohl am wichtigsten der Fall, wo A eine skalare Matrix $t E_n$ und t der «Fehler» des in Betracht kommenden Eigenwerts ist. Dann ist $|A|_2 = t \sqrt{n}$, so dass der Fehler bei der Bestimmung des zugehörigen Eigenvektors von der gleichen Größenordnung ist wie derjenige des Eigenwerts. Andererseits ist in diesem Falle die natürliche Zahl j der Formel (22) gleich 1, sofern S nur *lineare Elementarteiler* hat, also insbesondere reell-symmetrisch oder allgemeiner hermitisch ist. Es folgt dies daraus, dass, wenn der charakteristischen Wurzel 0 von S nur lineare Elementarteiler entsprechen, die Determinante von $S + t E$ für $t = 0$ eine Nullstelle genau der k -ten Ordnung hat, während ihre Unterdeterminanten der ersten Ordnung durch t^{k-1} , nicht aber durch t^k teilbar sind.

Ist insbesondere S reell-symmetrisch und t reell, so folgt

$$\frac{\xi}{|\xi|} = \tau \operatorname{sgn} t + O(t). \quad (25)$$

Dies liefert in der Praxis die Möglichkeit, die Konvergenz gegen den Vektor τ zu erhalten, indem man durch Vorzeichenänderung die erste nicht merklich gegen 0 konvergierende Komponente von $\xi/|\xi|$ durch eventuelle Multiplikation mit -1 positiv macht.

Summary

If a singular $n \times n$ -matrix S is approximated by $S + A$, an approximation to a non-trivial solution of $S\xi' = 0$ is obtained from a solution ξ of $(S + A)\xi' = \eta'$ in forming $\xi/|\xi|$. The vector η is here a conveniently chosen constant vector, and the error is, if $A = (a_{\mu\nu})$,

$$O\left(\sqrt{\sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|^2}\right).$$

(Eingegangen: 29. Dezember 1956.)

Spannungsfeld der auf den Rand einer elastisch anisotropen Halbebene wirkenden Tangentialkraft

VON HANS H. STADELMAIER, Raleigh, North Carolina, USA¹⁾

Einleitung

Das Spannungsfeld einer Normalkraft, die auf eine elastisch anisotrope Halbebene einwirkt, wurde in einer kürzlich erschienenen Arbeit²⁾ beschrieben. Die darin gewonnene Lösung gilt für beliebige kristallographische Systeme, mit der (aus Gründen der mathematischen Vereinfachung eingeführten) Einschränkung, dass die x - oder y -Achse eine geradzählige Symmetrieachse sein muss. Die Übersichtlichkeit des dort gewonnenen Ergebnisses regte zu der nachfolgenden kleinen Untersuchung an, die den Einfluss einer parallel zum Rande verlaufenden Einzellast beschreibt und schliesslich mit dem früheren Ergebnis zu einer Randlast beliebiger Richtung kombiniert werden kann.

Problem und Lösung

Wie man aus dem Lehrbuch von VOIGT³⁾ entnehmen kann, lautet bei geradzähliger Symmetrie der x - oder y -Achse die Differentialgleichung der Span-

¹⁾ Department of Engineering Research, North Carolina State College.

²⁾ H. H. STADELMAIER, ZAMP 7, 393 (1956).

³⁾ W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik* (Leipzig und Berlin 1910).

nungsfunktion

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + 2a \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + b \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

wobei

$$a = \frac{s'_{12} + s'_{66}/2}{s'_{11}} \quad \text{und} \quad b = \frac{s'_{22}}{s'_{11}}$$

und die s'_{ik} Elastizitätskoeffizienten in der Voigtschen Bezeichnungsweise sind. Der Strich deutet an, dass die Elastizitätskoeffizienten von der Orientierung zwischen (x, y, z) und den kristallographischen Achsen abhängen. Die anisotrope elastische Platte erfülle die Halbebene $y \geq 0$. Die Randbedingungen lauten jetzt

$$\tau_{xy}(x \neq 0, y=0) = 0, \quad \text{Tangentialkraft } P \text{ in } (0, 0), \quad \sigma_y(x, 0) = 0. \quad (2)$$

(1) und (2) werden erfüllt von der nachfolgenden Spannungsfunktion, die in zwei Abschnitte zerfällt:

Falls $a^2 > b$,

$$\varphi = \frac{P}{\pi(p-q)} \left\{ \begin{aligned} & p y \operatorname{arctg} \frac{p y}{x} - \frac{x}{2} \ln(x^2 + p^2 y^2) + x \ln p \\ & - q y \operatorname{arctg} \frac{q y}{x} + \frac{x}{2} \ln(x^2 + q^2 y^2) - x \ln q \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

wobei

$$p^2 = a - \sqrt{a^2 - b}, \quad q^2 = a + \sqrt{a^2 - b}$$

bzw. bei $a^2 < b$,

$$\varphi = \frac{P}{2\pi s} \left\{ \begin{aligned} & (x - s y) \operatorname{arctg} \frac{r y}{x - s y} + \frac{r y}{2} \ln[r^2 y^2 + (x - s y)^2] \\ & - (x + s y) \operatorname{arctg} \frac{r y}{x + s y} - \frac{r y}{2} \ln[r^2 y^2 + (x + s y)^2] \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

mit

$$r^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{b}), \quad s^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{b}).$$

Für $p = q = 1$ bzw. $r = 1, s = 0$ geht (3a, b) über in den bekannten Ausdruck für den isotropen Fall

$$\varphi = \frac{P}{\pi} y \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (3c)$$

Aus der Spannungsfunktion φ folgen durch Differentiation die Spannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{P}{\pi} (p+q) \frac{x y^2}{(x^2 + p^2 y^2)(x^2 + q^2 y^2)}, \\ \sigma_x &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{P}{\pi} (p+q) \frac{x^3}{(x^2 + p^2 y^2)(x^2 + q^2 y^2)}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{P}{\pi} (p+q) \frac{x^2 y}{(x^2 + p^2 y^2)(x^2 + q^2 y^2)} \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2P}{\pi} r \frac{x y^2}{[r^2 y^2 + (x - s y)^2] [r^2 y^2 + (x + s y)^2]}, \\ \sigma_x &= \frac{2P}{\pi} r \frac{x^3}{[r^2 y^2 + (x - s y)^2] [r^2 y^2 + (x + s y)^2]}, \\ \tau_{xy} &= \frac{2P}{\pi} r \frac{x^2 y}{[r^2 y^2 + (x - s y)^2] [r^2 y^2 + (x + s y)^2]}. \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

Für $p = q = 1$ bzw. $r = 1, s = 0$ erhält man wieder den bekannten isotropen Fall

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_x = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (4c)$$

Transformation auf Polarkoordinaten

Die Beziehungen $y = R \sin \vartheta$, $x = R \cos \vartheta$ führen unter Berücksichtigung der Transformationseigenschaften der Spannungen zu den Ausdrücken

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{P}{\pi} (p + q) \frac{\cos \vartheta}{\sin^4 \vartheta (\operatorname{ctg}^2 \vartheta + p^2) (\operatorname{ctg}^2 \vartheta + q^2)} \cdot \frac{1}{R}, \\ \sigma_\vartheta &= 0, \quad \tau_{R\vartheta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{2P}{\pi} r \frac{\cos \vartheta}{\sin^4 \vartheta [r^2 + (s - \operatorname{ctg} \vartheta)^2] [r^2 + (s + \operatorname{ctg} \vartheta)^2]} \cdot \frac{1}{R}, \\ \sigma_\vartheta &= 0, \quad \tau_{R\vartheta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

Dies führt für $p = q = 1$ bzw. $r = 1, s = 0$ zum isotropen Fall

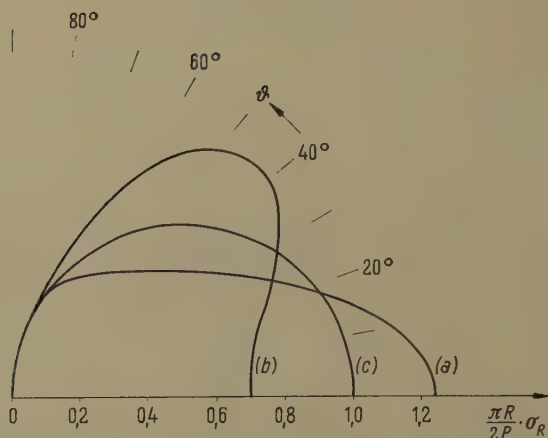
$$\sigma_R = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos \vartheta}{R}. \quad (5c)$$

Wie im Falle der Normalkraft hat man eine reine Radialspannung, welche für die beiden früher²⁾ besprochenen Fälle in Figur 1 dargestellt ist. Dazu muss man die s'_{ik} für die interessierenden Orientierungen in α -Eisen berechnen und daraus die p, q bzw. r, s gewinnen. Die Orientierungen sind (unter Angabe der Millerschen Indizes derjenigen Kristallachsen, die mit x, y und z zusammenfallen) wie folgt:

Fall (5a) $x = \langle 110 \rangle, \quad y = \langle 110 \rangle, \quad z = \langle 100 \rangle;$

Fall (5b) $x = \langle 100 \rangle, \quad y = \langle 110 \rangle, \quad z = \langle 110 \rangle.$

Dafür wird im ersten Fall $p = 0,47, q = 2,12$ und im zweiten Fall $r = 0,47, s = 0,54$. Mit diesen Werten sind die σ_R berechnet.

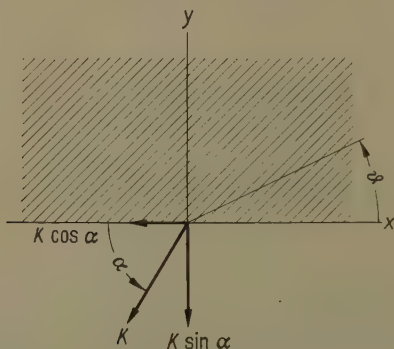


Figur 1

Polardiagramm der Spannungen nach Gleichungen (5) für $\vartheta < 90^\circ$. Kurven (a), (b) und (c) entsprechen Fällen a, b und c des Textes.

Randlast in Schrägrichtung

Für eine in beliebiger Richtung unter dem Winkel α zur x -Achse (Figur 2) wirkende Randlast K gewinnt man das Spannungsfeld durch Superposition



Figur 2

Lage der Winkel ϑ und α .

des Feldes der Tangentialkraft $K \cos \alpha$ auf das der Normalkraft $K \sin \alpha$. Für eine Normallast P hatten wir früher²⁾ gefunden, dass

$$\sigma_R = \frac{P}{\pi} p q (p + q) \frac{1}{\sin^3 \vartheta (\operatorname{ctg}^2 \vartheta + p^2) (\operatorname{ctg}^2 \vartheta + q^2)} \cdot \frac{1}{R}, \quad (6a)$$

bzw.

$$\sigma_R = \frac{2P}{\pi} r (r^2 + s^2) \frac{1}{\sin^3 \vartheta [r^2 + (s - \operatorname{ctg} \vartheta)^2] [r^2 + (s + \operatorname{ctg} \vartheta)^2]} \cdot \frac{1}{R}. \quad (6b)$$

Damit ergibt sich für die Randlast K

$$\sigma_R = \frac{K}{\pi} (p + q) \frac{p q \sin \vartheta \sin \alpha + \cos \vartheta \cos \alpha}{\sin^4 \vartheta (\operatorname{ctg}^2 \vartheta + p^2) (\operatorname{ctg}^2 \vartheta + q^2)} \cdot \frac{1}{R}, \quad (7a)$$

bzw.

$$\sigma_R = \frac{2K}{\pi} r \frac{(r^2 + s^2) \sin \vartheta \sin \alpha + \cos \vartheta \cos \alpha}{\sin^4 \vartheta [r^2 + (s - \operatorname{ctg} \vartheta)^2] [r^2 + (s + \operatorname{ctg} \vartheta)^2]} \cdot \frac{1}{R}. \quad (7b)$$

Für Isotropie ($p = q = 1$ bzw. $r = 1, s = 0$) erhält man wieder den bekannten Fall

$$\sigma_R = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\cos(\alpha - \vartheta)}{R}. \quad (7c)$$

Betrachtet man den gesamten Nenner in (7a) bzw. (7b) als verzerrten Radius, so bemerkt man, dass die Superposition der Spannungen zu Ausdrücken führt, die im Gegensatz zum isotropen Fall nicht mehr einfach aus der Differenz der Winkel α und ϑ hervorgehen. Dies ist eine Folge der unterschiedlichen Koeffizienten in Gleichungen (5) und (6). (Die Koeffizienten müssen die angegebene Form haben, damit die Randbedingungen erfüllt werden.)

Diskussion

Wenn man bedenkt, dass für Fall *a* der Figur 1 die Richtungen maximalen Elastizitätsmoduls parallel x und y verlaufen, für Fall *b* dagegen bei $\vartheta = 55^\circ$ und 125° liegen, so findet man wieder das Prinzip bestätigt, dass die Spannung in den elastisch harten Richtungen verstärkt wird. Insbesondere findet man für die schrägliegende harte Richtung (Fall *b*) die maximale Spannung wiederum zwischen der härtesten Richtung und der Richtung der Randkraft.

Im Problem der Normalkraft wurden für Fall *b* die Höchstwerte der Spannungen bei $\vartheta = \operatorname{arccctg}(\pm s)$ gefunden, also in der Nähe der Minima des »reduzierten Radius«⁴⁾

$$R^* = \frac{R}{r(r^2 + s^2)} \sin^4 \vartheta [r^2 + (s - \operatorname{ctg} \vartheta)^2] [r^2 + (s + \operatorname{ctg} \vartheta)^2],$$

während man mit der Tangentialkraft, trotz gleichen Wertes des reduzierten Radius, die Maximalspannungen stärker zu der x -Achse geneigt findet. Dies erklärt sich daraus, dass die aus $\partial \sigma_R / \partial \vartheta = 0$ und $\operatorname{ctg} \vartheta = \pm s$ abgeleitete Bedingung

$$\mp (3r^2 + 8s^2 - 4) = 0,$$

deren linke Seite ein Mass des Anstiegs an den Stellen $\vartheta = \operatorname{arccctg}(\pm s)$ ist, von den Zahlenwerten für r und s mit guter Näherung erfüllt wird. Dagegen

⁴⁾ Nur ausnahmsweise wird in einem dem Fall *b* entsprechenden Beispiel das Minimum des reduzierten Radius genau in der durch die Kristallsymmetrie ausgezeichneten $\langle 111 \rangle$ -Richtung liegen, da neben der Symmetrie auch die Zahlenwerte der elastischen Koeffizienten hierfür mitbestimmend sind.

findet man bei der Randbedingung der Tangentialkraft einen entsprechenden Ausdruck, der für $\text{arcctg}(+s)$, das heisst $\vartheta < 90^\circ$, negativ und für $\text{arcctg}(-s)$, das heisst $\vartheta > 90^\circ$, positiv ist. Daraus folgt, dass bei der Randbedingung der Tangentialkraft die Richtung maximaler Spannung grundsätzlich zwischen der Richtung der Randlast und der Richtung des kleinsten reduzierten Radius liegen muss.

Diese Arbeit wurde gefördert vom Office of Ordnance Research, US Army, wofür an dieser Stelle gedankt sei.

Summary

The stress distribution obtained by solving the two-dimensional problem in an anisotropic medium, with boundary conditions of a concentrated tangential load acting on the boundary of a semi-infinite plate, is purely radial. The solution is given in closed form and is combined with the solution for a concentrated normal load to solve the problem of an inclined force acting on the boundary.

(Eingegangen: 2. April 1957.)

Toroidal Oscillations of a Spherical Mass of Viscous Conducting Fluid in a Uniform Magnetic Field

By KEITH STEWARTSON, Bristol, England¹⁾

1. Introduction

The torsional oscillations of a highly conducting sphere in a uniform magnetic field have been considered by PLUMPTON and FERRARO [4]²⁾. They showed that if the conductivity σ were assumed to be infinite in the governing differential equation but the boundary condition on the surface of the sphere appropriate to a finite conductivity retained, then a continuous spectrum of eigenvalues could be obtained. Corresponding to each eigenvalue there was an oscillation of one shell of the sphere, formed by rotating a certain line of force about the axis of symmetry. The continuous spectrum is a novel feature in such problems and it was suggested by COWLING [1] that this degeneracy may be removed if a rotating sphere is considered.

In this paper we show that if the fluid is not quite a perfect conductor then there is only a doubly infinite discrete set of eigenvalues and the corresponding oscillations are confined to the immediate vicinity of the axis of symmetry. If now $\sigma \rightarrow \infty$ the set remains discrete but becomes singly infinite

¹⁾ University of Bristol, Department of Mathematics.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 297.

and the corresponding oscillations occur only on the axis of symmetry. Anywhere else in the sphere the fluid is at rest. The effect of a small viscosity is also considered and found to be negligible.

2. General Considerations

It is supposed that the sphere has centre O , is of radius a and the magnetic field imposed is uniform, of strength H , and acts in the direction Oz . If P is any point let R denote the distance of P from O , r its distance from Oz and θ the angle between Oz and OP . Further if \mathbf{v} , \mathbf{h} are the velocity and magnetic vectors at P in the disturbed state MAXWELL'S and EULER'S equations reduce to

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi\sigma} \text{curl curl } \mathbf{h} = \text{curl}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{h}), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{4\pi\rho} \text{curl } \mathbf{h} \wedge \mathbf{h} - \nu \text{curl curl } \mathbf{v}, \quad (2.2)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{h} = 0 \quad (2.3)$$

where σ is the conductivity in electro-magnetic units, ρ the (constant) density, p the pressure, ν the kinematic viscosity and where all body forces save magneto-hydrodynamic ones have been neglected.

We assume that in the disturbed state all perturbed components oscillate with the same period $2\pi/\alpha$ and are small. For toroidal oscillations therefore, symmetrical about Oz , we may write, in cylindrical polar coordinates,

$$\mathbf{v} = (0, r\Omega e^{i\alpha t}, 0), \quad \mathbf{h} = (0, r h e^{i\alpha t}, H) \quad (2.4)$$

where Ω , h are small functions of r and z only. The governing equations then reduce to $p = \text{const}$,

$$i\alpha h = H \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \cdot \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) \quad (2.5)$$

and

$$i\alpha \Omega = \frac{H}{4\pi\rho} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right). \quad (2.6)$$

There are two boundary conditions at the surface of the sphere $R = a$. First \mathbf{h} must be equal to the external irrotational magnetic field induced by the motion, and since the potential of this field must be a function of r and z only

$$h = 0 \quad \text{when} \quad R = a. \quad (2.7)$$

Second the stress across a tangent plane to the surface of the sphere at the sphere must be continuous and since it is constant and normal to the plane

if $R > a$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial R} = 0 \quad \text{on} \quad R = a. \quad (2.8)$$

The problem is to determine which values of α lead to nonzero values of Ω and h satisfying (2.5)–(2.8). This problem is not easy in general, but greatest interest centres on the special case when σ is large and ν is small. However, if we formally let $\sigma \rightarrow \infty$ and $\nu \rightarrow 0$ in (2.5) and (2.6) contradictions are obtained. For then the equations reduce to

$$i \alpha h = H \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad \text{and} \quad i \alpha \Omega = \frac{H}{4 \pi \varrho} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.9)$$

with solution

$$(4 \pi \varrho)^{1/2} \Omega = i A(r) \sin(\beta z + \varepsilon), \quad h = A(r) \cos(\beta z + \varepsilon) \quad (2.10)$$

where A and ε are functions of r only, and $4 \pi \varrho \alpha^2 = H^2 \beta^2$.

First from (2.5) and (2.6) we see that $\partial \Omega / \partial r$ and $\partial h / \partial r$ must vanish at $r = 0$ for all σ , ν , and z . Hence if Ω and h are not identically equal to zero, they cannot both vanish everywhere on the axis of symmetry. In the limit $\sigma \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow 0$ therefore this must also be true implying that

$$A(0) \neq 0. \quad (2.11)$$

Second, since $h = 0$ when $R = a$

$$A(r) = 0 \quad \text{if} \quad r \neq r_0, \quad \varepsilon = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\pi}{2}, \quad \text{and} \quad \cos[\beta(a^2 - r_0^2)^{1/2} \pm \varepsilon] = 0 \quad (2.12)$$

where $r_0 < a$ is an arbitrary constant.

This is PLUMPTON and FERRARO'S [4] result that the shells $r = \text{const}$ oscillate independently and we note that it contradicts (2.11) unless $r_0 = 0$.

Third, since $\partial \Omega / \partial R = 0$ when $R = a$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\pi}{2}, \quad \cos(\beta a \pm \varepsilon) = 0 \\ \text{and} \\ r A'(r) \cos(\beta z + \varepsilon) = \beta A(r) z \sin(\beta z + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

where $z = (a^2 - r^2)^{1/2}$, which contradicts (2.12).

One reason for these two contradictions is that proceeding to the limit of zero viscosity or infinite conductivity or both, the order of the governing equation has been depressed by two so that two independent solutions have been lost. Although in general they will be negligible when either of ν and σ^{-1} are small, they will become important near the surface of the sphere since the other two solutions cannot satisfy both boundary conditions. A boundary layer will therefore be formed near $R = a$ in which the operator $\partial / \partial R$ will be large to

counteract the numerical factors ν or σ^{-1} in (2.5) and (2.6). The operator $\partial/\partial\theta$ on the other hand can only be large in a small region of the surface for otherwise the oscillation would be too complicated to be of interest.

Since if $\partial/\partial R$ is large so is $\partial/\partial z$, both $i\alpha h$ and $i\alpha\Omega$ may be neglected in (2.5) and (2.6) which then reduce to

$$H \cos \theta \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \frac{1}{4\pi\sigma} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial R^2} = H \cos \theta \frac{\partial h}{\partial R} + 4\pi\rho\nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} = 0. \quad (2.14)$$

The solution of these equations which is rapidly varying when $a - R$ is small positive is

$$h = 4\pi(\rho\sigma\nu)^{1/2}\Omega = C(\theta) \exp \left\{ H(R-a) \left(\frac{\sigma}{\rho\nu} \right)^{1/2} \cos \theta \right\} \equiv h_1 \quad (2.15)$$

where $C(\theta)$ is an arbitrary function of θ . The other rapidly varying solution corresponds to a boundary layer just outside the sphere.

This argument applies equally well whether ν or σ^{-1} or both are supposed small, provided only that neither is large. We shall now show that if ν is small the boundary condition $\partial\Omega/\partial R = 0$ is accounted for by a solution of the form of (2.15) so that in the limiting case $\nu \rightarrow 0$ it may be neglected. For if ν is small the slowly varying solutions are found by expanding in powers of ν . Let us call the leading terms, which satisfy (3.1) below, h_0 and Ω_0 . Then the complete solution is

$$h = h_0 + h_1 \quad \text{and} \quad 4\pi\Omega = 4\pi\Omega_0 - h_1(\rho\sigma\nu)^{-1/2} \quad (2.16)$$

and from the boundary conditions

$$h_0 + C(\theta) = 0, \quad \frac{\partial \Omega_0}{\partial R} - \frac{H}{4\pi\nu\rho} \cos \theta C(\theta) = 0 \quad (2.17)$$

when $R = a$. Hence

$$H \cos \theta h_0 + 4\pi\rho\nu \frac{\partial \Omega_0}{\partial R} = 0 \quad (2.18)$$

when $R = a$, and on proceeding to the limit $\nu \rightarrow 0$ it follows that $h_0 = 0$.

According to this argument therefore the boundary condition on h must be satisfied by those solutions of (2.5) and (2.6) which neglect ν as a first approximation while the condition on Ω introduces a boundary layer in which $\partial\Omega/\partial R$ falls rapidly to zero on the surface but in which the changes in Ω and h are only $O(\nu\rho/\sigma)^{1/2}$. A rapid change in h in a boundary layer near the surface would of necessity result in a much more violent change in $\partial\Omega/\partial R$ so that if a boundary condition is to be lost as $\nu \rightarrow 0$, it must be that on $\partial\Omega/\partial R$.

The solution in (2.13) is therefore incorrect, thus resolving the contradiction between it and (2.12). There remains the contradiction between (2.11) and (2.12). This may be resolved if either there is a boundary layer in the neighbourhood of $r = 0$ so that the condition $A(0) \neq 0$ may be neglected and

which leads immediately to PLUMPTON and FERRARO's result [4], or by requiring that $r_0 \equiv 0$. We shall show in the next section that the second alternative is correct.

3. Eigenvalues for an Inviscid Conducting Sphere

In the previous section we showed that if ν is small the fluid could be treated as inviscid but having a finite conductivity in determining the eigenvalues. Then h satisfies

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \left(\frac{H^2}{4\pi\varrho} + \frac{i\alpha}{4\pi\sigma} \right) + \frac{i\alpha}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \alpha^2 h = 0 \quad (3.1)$$

and $h = 0$ when $R = a$.

Introduce quasi-elliptic co-ordinates ξ, η where

$$r = b \left(\frac{i\alpha}{4\pi\sigma} \right)^{1/2} \cosh \xi \cos \eta, \quad z = b \left(\frac{H^2}{4\pi\varrho} + \frac{i\alpha}{4\pi\sigma} \right)^{1/2} \sinh \xi \sin \eta \quad (3.2)$$

b is a constant and $i = e^{\pi i/2}$. Then the sphere $R = a$ becomes $\xi = \xi_0$ where

$$H \sinh \xi_0 = \left(\frac{i\alpha}{\sigma} \right)^{1/2}, \text{ provided that } b = \frac{aH}{\left(\frac{i\alpha}{\sigma} \right)^{1/2} \left\{ \frac{H^2}{4\pi\varrho} + \frac{i\alpha}{4\pi\sigma} \right\}^{1/2}} \text{ and } \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + 3 \tanh \xi \frac{\partial h}{\partial \xi} - 3 \tan \eta \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\alpha^2 b^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) h = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Since $h = 0$ when $\xi = \xi_0$ the eigenvalues may be found by separating the variables. Write

$$h = X(\eta) Y(\xi) \quad (3.5)$$

when

$$\frac{d^2 X}{d\eta^2} - 3 \tan \eta \frac{dX}{d\eta} + \left(c - \frac{\alpha^2 b^2}{2} \cos 2\eta \right) X = 0 \quad (3.6)$$

and

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} - 3 \tanh \xi \frac{dY}{d\xi} + \left(\frac{\alpha^2 b^2}{2} \cosh 2\xi - c \right) Y = 0, \quad (3.7)$$

c being at present an arbitrary constant.

The boundary condition now becomes

$$Y = 0 \quad \text{when} \quad \xi = \xi_0.$$

Further if $Y(0) \neq 0$ then X must be an even function of η and $Y'(0) = 0$ so that h and $\partial h / \partial z$ may be continuous at $z = 0$. If $Y(0) = 0$ then X must be an odd function of η so that $\partial h / \partial z$ may be continuous at $z = 0$. Finally X must be bounded when $\eta = \pm \pi/2$.

First let us consider the equation for X assuming to begin with that αb and c are real. If either $X(0)$ or $X'(0) > 0$, X must increase steadily in $0 < \eta < \eta_0$

where $\alpha^2 b^2 \cos 2\eta_0 = c$, oscillating thereafter but remaining finite as $\eta \rightarrow \pi/2$. In particular if X only oscillates a finite number of times then as $\alpha b \rightarrow \infty$, $\eta_0 \rightarrow \pi/2$. In that case the conditions imposed on X at $\eta = 0$ imply that, if $X(\pi/2) = 1$, whichever of $X(0)$ and $X'(0)$ does not vanish must be exponentially small. An approximation to the acceptable values of c and the corresponding forms of X as $\alpha b \rightarrow \infty$ will now be found. First of all consider values of η near $\pi/2$. Let

$$\eta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{\alpha b}\right)^{1,2} \quad (3.8)$$

when

$$x \frac{d^2 X}{dx^2} + 2 \frac{dX}{dx} + \left(\beta - \frac{x}{4}\right) X = O\left(\frac{X}{\alpha b}\right) \quad (3.9)$$

for finite x where $8\alpha b\beta = 2c + \alpha^2 b^2$.

The boundary conditions are that $X = 1$ when $x = 0$ and X is exponentially small when η is small and therefore when x is large. It is now easy to verify that this is only possible if

$$\beta = n + 1 + O\left(\frac{1}{\alpha b}\right) \quad (3.10)$$

where n is an integer.

The solution is then

$$X = e^{-x/2} \sum_{r=0}^n \frac{(-)^r n! x^r}{(n-r)! r! (r+1)!} + O\left(\frac{1}{\alpha b}\right) \quad (3.11)$$

and is valid so long as $x = o(\alpha b)$.

On the other hand, so long as

$$\frac{\pi}{2} - \eta \gg (\alpha b)^{-1/2}$$

is a solution of (3.6) in descending powers of αb may be obtained by JEFFREY'S method [2]. Write

$$X = F(\eta) \exp \alpha b (\sin \eta - 1)$$

and substitute into (3.6) assuming that F is a slowly varying function of η . The first approximation gives

$$F \propto \frac{\cos^{2n} \eta}{(1 + \sin \eta)^{2n+2}}. \quad (3.12)$$

These two solutions (3.11) and (3.12) overlap and may be combined into one on writing

$$x = 2\alpha b (1 - \sin \eta)$$

instead of (3.8), viz.

$$X = \frac{2^{2n+2} \exp \alpha b (\sin \eta - 1)}{(1 + \sin \eta)^{2n+2}} \sum_{r=0}^n \frac{(-)^r n! [2\alpha b (1 - \sin \eta)]^r}{(n-r)! r! (r+1)!}. \quad (3.13)$$

Since this solution is exponentially small when $\eta = 0$ it follows that only very small multiples of that solution of (3.6) which is exponentially large need be added to it to make either $X(0)$ or $X'(0)$ vanish. Since an addition of that kind is made by altering the value of c we conclude that to the order of the approximation there are both odd and even solutions of (3.6) bounded at $\eta = \pi/2$ when

$$c = -\frac{\alpha^2 b^2}{2} + 4(n+1)\alpha + O(1). \quad (3.14)$$

A similar result is known for Mathieu functions, and the reader is referred to [3] for details.

Second let us consider the equation for Y where c is given by (3.14) and either $Y(0)$ or $Y'(0) = 0$. Since only σ determines the order of magnitudes of the parameters $\xi_0 = O(b^{-1})$ we may expand (3.7) in powers of ξ , retaining only the leading terms, and obtaining

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} + [\alpha^2 b^2 - 4\alpha b(n+1)] Y = O(Y \alpha^2 b^2 \xi^2), \quad (3.15)$$

whence

$$Y = A \sin(\xi [\alpha^2 b^2 - 4\alpha b(n+1)]^{1/2} + \varepsilon), \quad (3.16)$$

where A and ε are constants.

Hence from the boundary conditions

$$\xi_0 [\alpha^2 b^2 - 4\alpha b(n+1)]^{1/2} = \frac{m\pi}{2} + O(\xi_0^2) \quad (3.17)$$

where m is an integer.

Although (3.17) has been obtained on the assumption that αb is real we may now appeal to the theory of analytic continuation to extend it to the values given in (3.3) provided only that we avoid $\alpha = 0$. It then follows that when σ is large

$$\alpha = \frac{m H \pi}{2 a} + \frac{n+1}{2 a} \left\{ \frac{m^2 H^2}{4 \pi \varrho a^2 \sigma^2} \right\}^{1/4} (1+i) + O\left(\frac{1}{\sigma}\right) \quad (3.18)$$

where m and n are integers.

For finite values of m and n the oscillation is confined to the immediate neighbourhood of the axis of symmetry being negligible at distances $O(\sigma^{-1/2})$ from it. Hence in the limit $\sigma \rightarrow \infty$ the disturbance is confined to the axis of symmetry so that the criterion (2.11) is of equal importance to the condition $h = 0$ when $R = a$.

When σ is large and n is finite (3.18) shows that the oscillations have a damping factor $O(\sigma^{-1/2})$. It is possible to obtain solutions in which the oscillation is not confined to the neighbourhood of the axes but only if $n = O(\sigma^{1/2})$ from

(3.14) and (3.3). In these cases however the time of decay is $O(a/mH)$ which is of the same order as the period of oscillation.

REFERENCES

- [1] T. G. COWLING, Proc. Roy. Soc. [A] 233, 319 (1955).
- [2] H. JEFFREYS and B. W. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics*, 2nd ed. (Cambridge University Press 1950), p. 523.
- [3] N. W. MCLACHLAN, *Mathieu Functions* (Oxford University Press 1947), p. 236.
- [4] C. PLUMPTON and V. C. A. FERRARO, Ap. J. 121, 168 (1955).

Zusammenfassung

Es werden die toroidalen Schwingungen einer flüssigen Kugel in einem konstanten Magnetfeld betrachtet. Nach [2] ist bekannt, dass das Spektrum der Eigenwerte für vollkommen leitende Flüssigkeit kontinuierlich ist. Hier wird aufgezeigt, dass für endliche Leitfähigkeit ein diskretes Spektrum entsteht und dass der diskrete Charakter erhalten bleibt, wenn die Leitfähigkeit nach Unendlich strebt. In diesem Grenzfall konzentriert sich die Schwingung auf die Symmetrieachse.

(Received: December 22, 1956.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Résolution systématique de problèmes aux limites linéaires

Par PAUL BURGAT, Neuchâtel

1. Introduction

Dans un précédent travail [1]¹⁾, j'ai indiqué la transformation fonctionnelle appropriée à la résolution, dans un intervalle fini, de problèmes constitués par une équation différentielle du n -ième ordre et n conditions aux limites générales, linéairement indépendantes, et donné la solution sous la forme d'une série de fonctions propres.

Rappelons quelques résultats relatifs au 2^e ordre.

La méthode appliquée au problème

$$y'' + r y = f(x); \quad \alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = \alpha, \quad \beta_3 y(l) + \beta_4 y'(l) = \beta$$

$[f(x)$, fonction généralement continue; r , les α et les β sont des constantes réelles; $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_3^2 + \beta_4^2) \neq 0$; $\alpha_1 \alpha_2 \leq 0$; $\beta_3 \beta_4 \geq 0]$ conduit à

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2 - r} \left[\frac{\omega_k}{N_k} (\alpha - \varrho_k \beta) - A_k \right] (\alpha_1 \sin \omega_k x - \alpha_2 \omega_k \cos \omega_k x) \quad (1)$$

¹⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 302.

où

$$N_k = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \omega_k^2) \frac{l}{2} + \frac{\alpha_2^2 \omega_k^2 - \alpha_1^2}{4 \omega_k} \sin 2 \omega_k l - \alpha_1 \alpha_2 \sin^2 \omega_k l$$

$$= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \omega_k^2) \frac{l}{2} + \frac{(\alpha_2 \beta_3 - \alpha_1 \beta_4) (\alpha_2 \beta_4 \omega_k^2 - \alpha_1 \beta_3)}{2 (\beta_3^2 + \beta_4^2 \omega_k^2)},$$

$$Q_k = - \frac{\alpha_1 \sin \omega_k l - \alpha_2 \omega_k \cos \omega_k l}{\beta_4 \omega_k} = \frac{\alpha_1 \cos \omega_k l + \alpha_2 \omega_k \sin \omega_k l}{\beta_3}$$

et

$$A_k = \frac{1}{N_k} \int_0^l f(\xi) (\alpha_1 \sin \omega_k \xi - \alpha_2 \omega_k \cos \omega_k \xi) d\xi;$$

les ω_k sont les racines positives de l'équation

$$\cotg \omega l = \frac{\alpha_2 \beta_4}{\alpha_2 \beta_3 - \alpha_1 \beta_4} \omega + \frac{\alpha_1 \beta_3}{\alpha_2 \beta_3 - \alpha_1 \beta_4} \cdot \frac{1}{\omega}. \quad (2)$$

Quand $\alpha_1 = \beta_3 = 0$, $\alpha_2 = \beta_4 = 1$, la série écrite plus haut doit être précédée du terme

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\alpha - \beta}{l} + \frac{1}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi \right].$$

Cas particuliers

$$y(0) = \alpha, y(l) = \beta: \quad y = \sum_1^\infty \frac{1}{\left(k \frac{\pi}{l}\right)^2 - r} \left[\frac{2k\pi}{l^2} [\alpha - (-1)^k \beta] - A_k \right] \sin k \frac{\pi}{l} x; \quad (3)$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin k \frac{\pi}{l} \xi d\xi.$$

$$y'(0) = \alpha, y'(l) = \beta: \quad y = \frac{1}{r} \left[\frac{\alpha - \beta}{l} + A_0 \right] - \sum_1^\infty \frac{1}{\left(k \frac{\pi}{l}\right)^2 - r} \times \left[\frac{2}{l} [\alpha - (-1)^k \beta] + A_k \right] \cos k \frac{\pi}{l} x;$$

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi; \quad A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos k \frac{\pi}{l} \xi d\xi \quad (k \neq 0).$$

$$y'(0) = \alpha, y'(l) = \beta: \quad y = - \sum_1^\infty \frac{1}{\left[\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}\right]^2 - r} \times \left[\frac{1}{l} \left(2\alpha + (-1)^k (2k - 1) \frac{\pi}{l} \beta \right) + A_k \right] \cos \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} x;$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} \xi d\xi.$$

$$\begin{aligned}
 y(0) = \alpha, y'(l) = \beta: \quad y &= \sum_1^{\infty} \frac{1}{\left[\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}\right]^2 - r} \\
 &\times \left[\frac{1}{l} \left((2k-1) \frac{\pi}{l} \alpha - (-1)^k 2\beta \right) - A_k \right] \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{l} x; \\
 A_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{l} \xi d\xi.
 \end{aligned}$$

Remarque. Les séries ont pour somme y en tout point de l'intervalle ouvert $(0, l)$. Si $\alpha_2 \beta_1 \neq 0$, elles représentent la solution *sur* $(0, l)$.

2. Equations aux dérivées partielles

Soit à résoudre un problème aux limites à deux variables indépendantes, l'une d'elles variant sur un segment, l'autre étant le temps ou, plus généralement, une variable parcourant l'intervalle $(0, +\infty)^2$.

Habituellement, on commence par appliquer la transformation de LAPLACE; on obtient un problème aux limites à une seule variable indépendante que l'on résout. La solution constitue la transformée de LAPLACE du problème proposé; on termine par une inversion.

Si ce procédé ne convient pas, soit que les calculs conduisent, lors de l'inversion, à des contours d'intégration compliqués [2], soit que les conditions initiales requises pour l'emploi de la transformation de LAPLACE ne figurent pas toutes dans le problème donné [3], on utilise une transformation de FOURIER.

Les développements rappelés dans le premier paragraphe rendent ces distinctions inutiles et permettent d'opérer *uniformément*.

On transforme d'abord le problème proposé par la transformation de LAPLACE; on écrit ensuite immédiatement, sous forme d'une série de fonctions propres, la solution du nouveau problème; la solution cherchée s'en déduit facilement.

Outre la simplicité et la rapidité, les principaux avantages de cette méthode sont les suivants:

a) Elle convient parfaitement à l'intégration des équations dont le *second membre* est une *fonction généralement continue* — de telles équations se présentent fréquemment dans les applications — contrairement aux méthodes qui exigent le calcul d'une intégrale générale.

b) Aucun recours à la théorie des résidus d'où absence des difficultés éventuelles signalées plus haut; *on reste dans le domaine des variables réelles*.

c) Il n'est pas nécessaire de réduire préalablement les problèmes complètement non homogènes à des problèmes semi-homogènes.

3. Exemples

Les deux exemples que nous avons choisis présentent chacun une particularité: dans le premier, l'équation transformée contient une fonction non donnée dans le problème proposé; les fonctions propres qui interviennent dans le second exemple ne sont pas orthogonales.

On trouvera dans [1] une application à l'équation de la chaleur.

²⁾ La méthode peut être étendue au cas de plus de deux variables indépendantes.

a) Soit $U(x, y)$ un potentiel ou une température indépendante du temps (équilibre thermique) satisfaisant à l'équation et aux conditions suivantes:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F(x),$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} U(x, y) = G(x) \quad (0 < x < l),$$

$$|U(x, y)| < M \quad (0 \leq x \leq l, y \geq 0),$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} [\alpha_1 U(x, y) + \alpha_2 U_x(x, y)] &= A, \\ \lim_{x \rightarrow l-0} [\beta_3 U(x, y) + \beta_4 U_x(x, y)] &= B \end{aligned} \right\} \quad (y > 0)$$

où A, B et M sont des constantes; $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_3^2 + \beta_4^2) \neq 0$, $\alpha_1 \alpha_2 \leq 0$, $\beta_3 \beta_4 \geq 0$ et α_1, β_3 non tous deux nuls, par hypothèse.

L'application de la transformation de LAPLACE donne, si l'on pose

$$\mathfrak{L}\{U(x, y)\} = u(x, s) \quad \text{et} \quad H(x) = \lim_{y \rightarrow +0} U_y(x, y),$$

$$u'' + s^2 u = s G(x) + H(x) + \frac{F(x)}{s},$$

$$\alpha_1 u(0, s) + \alpha_2 u'(0, s) = \frac{A}{s},$$

$$\beta_3 u(l, s) + \beta_4 u'(l, s) = \frac{B}{s}.$$

On a (1)

$$u = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2 - s^2} \left\{ \frac{\omega_k}{N_k} (A - \varrho_k B) \frac{1}{s} - s G_k - H_k - \frac{F_k}{s} \right\} \\ \times (\alpha_1 \sin \omega_k x - \alpha_2 \omega_k \cos \omega_k x);$$

ω_k, N_k et ϱ_k , voir page 298;

$$T_k = \frac{1}{N_k} \int_0^l T(\xi) (\alpha_1 \sin \omega_k \xi - \alpha_2 \omega_k \cos \omega_k \xi) d\xi \quad (T \equiv F, G, H).$$

Le problème transformé ne peut avoir une solution pour $s = \omega_k$ ($k = 1, 2, \dots$) que si

$$\left\{ \frac{\omega_k}{N_k} (A - \varrho_k B) \frac{1}{s} - s G_k - H_k - \frac{F_k}{s} \right\}_{s=\omega_k} = 0.$$

Cette condition détermine H_k (non donné):

$$H_k = \frac{A - \varrho_k B}{N_k} - \omega_k G_k - \frac{F_k}{\omega_k},$$

de sorte que

$$u = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2 - s^2} \left\{ \left(\frac{\omega_k}{N_k} (A - \varrho_k B) - F_k \right) \frac{\omega_k - s}{\omega_k s} + (\omega_k - s) G_k \right\} \\ \times (\alpha_1 \sin \omega_k x - \alpha_2 \omega_k \cos \omega_k x)$$

d'où

$$U(x, y) = \sum_1^{\infty} \left\{ \left(\frac{\omega_k}{N_k} (A - \varrho_k B) - F_k \right) \frac{1 - e^{-\omega_k y}}{\omega_k^2} + G_k e^{-\omega_k y} \right\} \\ \times (\alpha_1 \sin \omega_k x - \alpha_2 \omega_k \cos \omega_k x).$$

Cas particulier [voir aussi (3)]

$$\alpha_1 = \beta_3 = 1, \quad \alpha_2 = \beta_4 = 0; \quad A = 0; \quad F(x) \equiv 0; \quad G(x) \equiv G \text{ (constante).}$$

$$U(x, y) = \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{2 k \pi}{l^2} (-1)^{k-1} B \frac{1 - e^{-k(\pi/l)y}}{\left(k \frac{\pi}{l}\right)^2} + \frac{2 G}{l} \frac{1 - (-1)^k}{k \frac{\pi}{l}} e^{-k(\pi/l)y} \right\} \sin k \frac{\pi}{l} x.$$

Comme

$$x = \frac{2 l}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin k \frac{\pi}{l} x,$$

$$\operatorname{arctg} \frac{a \sin \frac{\pi}{l} x}{1 + a \cos \frac{\pi}{l} x} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} a^k \sin k \frac{\pi}{l} x \quad (|a| \leq 1),$$

$$\operatorname{arctg} \frac{2 a \sin \frac{\pi}{l} x}{1 - a^2} = \sum_1^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k} a^k \sin k \frac{\pi}{l} x \quad (|a| \leq 1),$$

on a aussi

$$U(x, y) = \frac{B x}{l} - \frac{2 B}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-(\pi/l)y} \sin \frac{\pi}{l} x}{1 + e^{-(\pi/l)y} \cos \frac{\pi}{l} x} + \frac{2 G}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 e^{-(\pi/l)y} \sin \frac{\pi}{l} x}{1 - e^{-2(\pi/l)y}}.$$

b) Vibrations longitudinales d'une barre de longueur l et de section constante A . L'extrémité $x = 0$ est fixe; une masse m est concentrée à l'autre extrémité. Initialement, la barre est au repos sous l'action d'une force de traction $F = A T$ et à l'instant $t = 0$, on supprime brusquement F [4].

Le déplacement longitudinal $U(x, t)$ d'une section transversale de la barre, pendant la vibration, satisfait à

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad \left(a^2 = \frac{E}{\varrho} \right),$$

$$U(x, 0) = \frac{T x}{E}, \quad U_t(x, 0) = 0,$$

$$U(0, t) = 0, \quad m U_{tt}(l, t) = -E A U_x(l, t).$$

L'application de la transformation de LAPLACE donne, si $\mathfrak{L}\{U(x, t)\} = u(x, s)$,

$$u'' - \frac{s^2}{a^2} u = -\frac{s}{a^2} \cdot \frac{T x}{E},$$

$$u(0, s) = 0, \quad m s^2 u(l, s) + E A u'(l, s) = s \frac{m T l}{E}.$$

Le problème associé [1] est

$$u'' + \omega^2 u = 0, \quad u(0, s) = 0, \quad m s^2 u(l, s) + E A u'(l, s) = 0;$$

les conditions aux limites contiennent le paramètre s .

On liera ω et s par l'égalité $\omega^2 = -s^2/a^2$ de sorte que l'équation caractéristique (2) devient

$$\cotg \omega l = \frac{m a^2}{E A} \omega. \quad (4)$$

Les fonctions propres $\sin \omega_k x$ ne sont pas orthogonales au sens habituel du terme mais

$$\int_0^l \sin \omega_i \xi \sin \omega_j \xi d\xi + \frac{m a^2}{E A} \sin \omega_i l \sin \omega_j l = 0 \quad (i \neq j).$$

La théorie établie dans le cas des fonctions orthogonales [1] reste valable à condition de remplacer les intégrales donnant a_k et N_k par les intégrales de STIELTJES:

$$a_k^{(S)} = \frac{1}{N_k^{(S)}} \left[\int_0^l y(\xi) \sin \omega_k \xi d\xi + \frac{m a^2}{E A} y(l) \sin \omega_k l \right],$$

$$N_k^{(S)} = \int_0^l \sin^2 \omega_k \xi d\xi + \frac{m a^2}{E A} \sin^2 \omega_k l.$$

On a (1)

$$u = \frac{T}{E} \sum_1^\infty \frac{a^2 s}{a^2 \omega_k^2 + s^2} \cdot \frac{1}{N_k^{(S)}} \left\{ -m l \omega_k \varrho_k + \frac{1}{a^2} \int_0^l \xi \sin \omega_k \xi d\xi \right\} \sin \omega_k x$$

où

$$N_k^{(S)} = \frac{l}{2} - \frac{\sin 2 \omega_k l}{4 \omega_k} + \frac{m a^2}{E A} \sin^2 \omega_k l = \frac{l}{2} + \frac{\sin 2 \omega_k l}{4 \omega_k},$$

en vertu de l'équation caractéristique (4), et

$$\varrho_k = -\frac{\cos \omega_k l}{m a^2 \omega_k^2}.$$

Par suite

$$U(x, t) = \frac{4 T}{E} \sum_1^\infty \frac{\sin \omega_k l}{\omega_k (2 \omega_k l + \sin 2 \omega_k l)} \cos a \omega_k t \sin \omega_k x.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BURGAT, ZAMP 4, fasc. 2, 146 (1953).
- [2] I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms* (Mc Graw-Hill, New York 1951), p. 107, 119, 130, 166.
- [3] R. V. CHURCHILL, *Modern Operational Mathematics in Engineering* (Mc Graw-Hill, New York 1944), p. 260 et 282.
- [4] S. TIMOSHENKO, *Théorie des Vibrations* (Ch. Béranger, Paris 1939), p. 314 et s.

Summary

Laplace transformation does not seem to be well adapted to the solving of certain boundary problems in partial differential equations for two reasons: (1) the transformed equation involves a function which is not given in the problem, (2) the inversion leads to rather complicated contour integrals [2].

We show that even in these cases Laplace transformation is suitable: thanks to the results obtained in a precedent work [1] and partially recalled in the first paragraph of this paper, we find the solution very easily and quickly; we remain in the real domain.

(Reçu: le 26 novembre 1956.)

Einige Bemerkungen zu M. Hanin und M. Reiner:

'On Isotropic Tensor-Functions and the Measure of Deformation'¹⁾

Von HANSWALTER GIESEKUS, Leverkusen, Deutschland²⁾

Zu 5: Das von HANIN und REINER entwickelte und in Abschnitt 5 zur Ableitung einer Tensorformel für das Hencky-Mass benutzte Verfahren ist zwar von grosser Allgemeinheit, doch kann man in dem vorliegenden Fall den Beweis der Formel (6.1) wesentlich einfacher auf direktem Wege führen. Man geht dazu von der für symmetrische Tensoren mit positiven Hauptwerten eindeutig definierten Formel

$$\ln A = \int_1^A a^{-1} \cdot da$$

aus, wobei das Integral als Parameterintegral aufzufassen ist³⁾, und formt hierin den Integranden mit Hilfe der Cayley-Hamilton-Gleichung um zu

$$a^{-1} = \frac{1}{III_a} a^2 - \frac{II_a}{III_a} a + \frac{I_a}{III_a} \mathbf{1},$$

so dass sich

$$\ln A = \int_1^A \frac{1}{III_a} a^2 \cdot da - \int_1^A \frac{II_a}{III_a} a \cdot da + \int_1^A \frac{I_a}{III_a} da$$

ergibt. Setzt man nun speziell

$$a = \mathbf{1} - 2 \sigma \mathbf{e},$$

wobei für die Invarianten I, II und III von $2 \mathbf{e}$ die folgenden Beziehungen gelten:

$$I_a = 3 - \sigma I, \quad II_a = 3 - 2 \sigma I + \sigma^2 II, \quad III_a = 1 - \sigma I + \sigma^2 II - \sigma^3 III,$$

¹⁾ Siehe ZAMP 7, 377–93 (1956).

²⁾ Farbenfabriken Bayer AG.

³⁾ Der Kürze halber verwenden wir hier die indicesfreie symbolische Schreibweise, bezeichnen Tensoren durch halbfette Buchstaben und das innere Produkt zweier Tensoren durch einen Punkt. Im übrigen schliessen wir uns jedoch ganz der Bezeichnungsweise von HANIN und REINER an.

und integriert über den skalaren Parameter σ von 0 bis 1, so folgt wegen

$$d\mathbf{a} = -2 \mathbf{e}^A d\sigma, \quad \mathbf{A} = \mathbf{1} - 2 \mathbf{e}^A, \quad 2 \mathbf{e}^H = -\ln(1 - 2 \mathbf{e}^A)$$

unmittelbar

$$2 \mathbf{e}^H = \int_0^1 \frac{2 \mathbf{e}^A \cdot (\mathbf{1} - 2 \sigma \mathbf{e}^A)^2}{1 - \sigma \mathbf{I} + \sigma^2 \mathbf{II} - \sigma^3 \mathbf{III}} d\sigma - \int_0^1 \frac{2 \mathbf{e}^A \cdot (\mathbf{1} - 2 \sigma \mathbf{e}^A) (3 - \sigma \mathbf{I})}{1 - \sigma \mathbf{I} + \sigma^2 \mathbf{II} - \sigma^3 \mathbf{III}} d\sigma \\ + \int_0^1 \frac{2 \mathbf{e}^A \cdot (3 - 2 \sigma \mathbf{I} + \sigma^2 \mathbf{II})}{1 - \sigma \mathbf{I} + \sigma^2 \mathbf{II} - \sigma^3 \mathbf{III}} d\sigma.$$

Nach Ausmultiplizieren der Klammern, Umwandlung von $(2 \mathbf{e}^A)^3$ mit Hilfe der Cayley-Hamilton-Gleichung und Ordnen nach Potenzen von $2 \mathbf{e}^A$ erhält man daraus dann leicht die Gleichung (6.1) von HANIN und REINER.

Man kann diese Formeln für die praktische Anwendung noch brauchbarer machen, wenn man die Integrale in allgemeiner Form auswertet. Das erfordert eine Partialbruchzerlegung und setzt somit die Kenntnis der Wurzeln des allen drei Integralen gemeinsamen Nennerpolynoms voraus. Das Problem der Berechnung dieser Wurzeln ist aber der Bestimmung der Hauptwerte e_1 , e_2 und e_3 des Tensors \mathbf{e}^A äquivalent, denn es gilt:

$$1 - \sigma \mathbf{I} + \sigma^2 \mathbf{II} - \sigma^3 \mathbf{III} = -\mathbf{III} \left(\sigma - \frac{1}{2 e_1} \right) \left(\sigma - \frac{1}{2 e_2} \right) \left(\sigma - \frac{1}{2 e_3} \right).$$

Damit erhält man nach dem bekannten Verfahren im Falle, dass alle Hauptwerte verschieden gross sind, für die drei Koeffizienten des Tensor-Polynoms:

$$F_0 = - \left[\frac{e_2 e_3}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \ln(1 - 2 e_1) + \frac{e_1 e_3}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)} \ln(1 - 2 e_2) \right. \\ \left. + \frac{e_1 e_2}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} \ln(1 - 2 e_3) \right], \\ F_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{e_2 + e_3}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \ln(1 - 2 e_1) + \frac{e_1 + e_3}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)} \ln(1 - 2 e_2) \right. \\ \left. + \frac{e_1 + e_2}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} \ln(1 - 2 e_3) \right], \\ F_2 = - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \ln(1 - 2 e_1) + \frac{1}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)} \ln(1 - 2 e_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} \ln(1 - 2 e_3) \right].$$

Sind zwei Hauptwerte gleich, zum Beispiel $e_2 = e_3$, so ergibt sich statt dessen:

$$F_0 = - \frac{e_2^2}{(e_1 - e_2)^2} \ln(1 - 2 e_1) + \frac{e_1 (2 e_2 - e_1)}{(e_1 - e_2)^2} \ln(1 - 2 e_2) - \frac{2 e_1 e_2}{(e_1 - e_2)(1 - 2 e_2)}, \\ F_1 = \frac{e_2}{(e_1 - e_2)^2} \ln(1 - 2 e_1) - \frac{e_2}{(e_1 - e_2)^2} \ln(1 - 2 e_2) + \frac{e_1 + e_2}{(e_1 - e_2)(1 - 2 e_2)}, \\ F_2 = - \frac{1}{4 (e_1 - e_2)^2} \ln(1 - 2 e_1) + \frac{1}{4 (e_1 - e_2)^2} \ln(1 - 2 e_2) - \frac{1}{2 (e_1 - e_2)(1 - 2 e_2)}.$$

Für den, physikalisch gesehen, allerdings trivialen Fall, dass alle drei Hauptwerte gleich sind, findet man, wie nur aus Gründen der Vollständigkeit mitgeteilt sei:

$$F_0 = -\ln(1 - 2e_1) + \frac{6e_1^2 - 2e_1}{(1 - 2e_1)^2}, \quad F_1 = \frac{1 - 4e_1}{(1 - 2e_1)^2}, \quad F_2 = \frac{1}{2(1 - 2e_1)^2}.$$

Man erkennt aus dieser Entwicklung deutlich, worin der Vorteil des Hanin-Reinerschen Verfahrens vor dem klassischen Verfahren zur Berechnung von Tensorfunktionen besteht: Zwar muss man nach wie vor die Hauptwerte von \mathbf{e}^A bestimmen, doch erspart man sich die im allgemeinen ziemlich mühsame Ausrechnung der Transformationsmatrix, welche \mathbf{e}^A auf Diagonalform bringt.

Zu 7: Der Deformationsgeschwindigkeits-Tensor $f_{rs} = (v_{r,s} + v_{s,r})/2$ stellt ein *strenges*, und zwar im wesentlichen das einzige transformationsinvariante Mass für die Deformationsgeschwindigkeit dar und ist keineswegs nur durch «prematuration» zu gewinnen. Dieser Tensor beschreibt nämlich genau die relative zeitliche Änderung des infinitesimalen Abstandes zweier körperfester Punkte. Im Gegensatz dazu ist die zeitliche Ableitung des Henckyschen Deformationstensors im allgemeinen *kein* Mass für die Deformationsgeschwindigkeit. Nur im Falle einer rotationsfreien Strömung werden – wenn man noch in bestimmter Weise über das Koordinatensystem verfügt – beide Tensoren identisch. Letzteres gilt zum Beispiel für das von HANIN und REINER auf Seite 391 angeführte Beispiel eines eindimensionalen Strömungsvorganges, wie man anhand der dort gegebenen Formeln leicht verifizieren kann.

Wegen einer allgemeinen Begründung dieser Behauptungen muss auf die Literatur verwiesen werden (vgl. zum Beispiel OLDROYD [1]⁴), RIVLIN und ERICKSEN [2], sowie TRUESDELL [3]). Doch soll an dieser Stelle der Sachverhalt wenigstens an einem einfachen Beispiel anschaulich gemacht werden. Wir wählen dafür das in obiger Arbeit auf den Seiten 389–390 behandelte Beispiel der einfachen Schubdeformation («simple shear») und setzen darin $S = qt$ ein. Dann liegt der Fall einer stationären Scherströmung vor. Der Deformationsgeschwindigkeits-Tensor lautet dafür:

$$f_{rs} = \frac{q}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

während sich für die zeitliche Ableitung des Hencky-Masses gemäss Gleichung (6.13) ein Ausdruck von der Form

$$\frac{d}{dt} e_{rs}^H = \frac{q}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \frac{q^2}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} t + \dots$$

ergibt. Hier stimmt der erste Term mit f_{rs} überein, alle folgenden jedoch enthalten die Zeit t explizit. Da aber für einen stationären Vorgang t nur bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt ist, so kann de_{rs}^H/dt unmöglich zur Beschreibung eines solchen Vorganges dienen.

Man kann den diesbezüglichen Überlegungen von HANIN und REINER nur so einen Sinn abgewinnen, dass man in obigem Ausdruck anstelle von t eine Konstante mit der Dimension einer Zeit τ , das heisst eine Art Relaxationszeit ein-

⁴) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 306.

führt. Anschaulich liegt dem dann folgende Hypothese zugrunde: Das betrachtete Material soll bei einer stationären Strömung (bei der Deformations- und Rückbildungsvorgänge im Gleichgewicht sind) das gleiche Spannungsverhalten zeigen wie im Augenblick einer momentan ausgeübten Deformation von der Grösse $S = q \tau$. Dadurch wird indessen nur eine recht spezielle Klasse von Flüssigkeiten erfasst; sie scheint wenigstens in erster Näherung mit der von FROMM [4] und DEWITT [5] postulierten verallgemeinerten Maxwell-Flüssigkeit übereinzustimmen. Solche Flüssigkeiten haben in der Tat keine Querviskosität («cross viscosity»), sind aber bekanntlich keineswegs unelastisch. Auch zeigen sie nicht den beschriebenen Zentripetal-Pump-Effekt, sondern vielmehr einen Zentrifugal-Effekt. Dies folgt aus [6], wo gezeigt wird, dass für das Auftreten des Zentripetal-Pump-Effekts (dort Torsions-Quereffekt genannt) eine Ungleichung der Form $3 \overset{\circ}{\eta}_2 - \overset{\circ}{\zeta}_1 > 0$ erfüllt sein muss, wobei $\overset{\circ}{\eta}_2$ den Grenzwert der Querviskosität und $\overset{\circ}{\zeta}_1$ denjenigen der ersten «Drehviskositäts-Funktion» bedeuten. Diese Grössen sind für eine Fromm-deWitt-Flüssigkeit mit der «Viskosität» μ , aber durch $\overset{\circ}{\eta}_2 = 0$, $\overset{\circ}{\zeta}_1 = \mu \tau$ gegeben, so dass obiger Ausdruck negativ wird.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. G. OLDROYD, Proc. roy. Soc. [A] 200, 523 (1950).
- [2] R. S. RIVLIN und J. L. ERICKSEN, J. rat. Mech. Anal. 4, 323 (1955).
- [3] C. TRUESDELL, J. rat. Mech. Anal. 1, 125 (1952), insbesondere S. 150–152.
- [4] H. FROMM, Ing.-Arch. 4, 452 (1933); Z. angew. Math. Mech. 28, 43 (1948).
- [5] T. W. DEWITT, J. appl. Phys. 20, 889 (1955).
- [6] H. GIESEKUS, erscheint demnächst in Kolloid-Z.

Summary

A simplified proof is given of the Hanin-Reiner formula for the Hencky measure of deformation, and the integrals of this formula are calculated. In the second part the author shows that, for the particular case of simple shear flow, the rate of the Hencky measure is not suitable for the description of the rate of deformation.

(Eingegangen: 8. Januar 1957.)

Comments on the Preceding Paper

We are grateful to Dr. GIESEKUS for his interesting remarks. Regarding § 5, we appreciate his simple derivation of our equation (6. 1). However, with regard to his further development, if the principal values e_1, e_2, e_3 of the tensor are known (but they are in general not known), all other functions of this tensor are also known, and therefore all measures can be defined. The detailed evaluation of the integrals, therefore, does not help.

With regard to § 7, we still regard the classical f_{rs} , as one possible flow tensor, but not the only one. Actually if f_{rs} is an invariant measure, any properly constructed function of f_{rs} will also be a measure.

M. HANIN and M. REINER

(Received: April 15, 1957.)

Note on a Direct Method of Solving Problems of Elastic Plates with Circular Boundaries Having Prescribed Displacement

By BIBHUTIBHUSAN SEN, Calcutta, India¹⁾

Introduction

In a previous paper [2]²⁾, a direct method of solving the first boundary value problem of elasticity connected with plates having a straight or circular boundary was discussed by the author. The object of this note is to deduce a direct method of solving the corresponding problems of circular holes in an elastic plate of isotropic material with displacements pre-scribed on the edge. To illustrate the method the problem of deformation in an infinite isotropic plate due to a nucleus in the form of a centre of dilatation at a finite distance from the hole is solved, it being assumed that the edge of the hole is rigidly fixed.

1. Method of Solution

We take u and v to be the components of displacement along the rectangular axes OX , OY , and suppose that they are independent of the coordinate Z . Assuming further that the Z -component of displacement is zero, we get in the absence of body forces the equations of equilibrium

$$\nabla_1^2(u, v) = -\frac{1}{1-2\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta, \quad (1.1)$$

where

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

and σ = Poisson's ratio (which takes a modified form in the case of generalized plane stress).

Δ being a harmonic function, we can put

$$\Delta = \operatorname{Re} \Phi(z), \quad (1.2)$$

in which Re denotes the real part, $z = x + iy$ and $\Phi(z)$ is an analytic function of z to be determined.

If the boundary of the circle be $r = a$, it can be easily found that the solutions of the equations (1.1) can be expressed as

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4(1-2\sigma)} \operatorname{Re} \left[(a^2 - r^2) \frac{\Phi(z)}{z} \right] + \operatorname{Re}[g_1(z)], \\ v &= \frac{1}{4(1-2\sigma)} \operatorname{Re} \left[(a^2 - r^2) \frac{i\Phi(z)}{z} \right] + \operatorname{Re}[g_2(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

In the above expressions $g_1(z)$ and $g_2(z)$ are analytic functions of z such that

$$[\operatorname{Re} g_1(z)]_{r=a} = [u]_{r=a}, \quad [\operatorname{Re} g_2(z)]_{r=a} = [v]_{r=a}. \quad (1.4)$$

¹⁾ Jadavpur University.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 309.

From the given values of u and v on the circular boundary, it is possible in general to obtain the functions $g_1(z)$ and $g_2(z)$. From (1.2) we have

$$\operatorname{Re}[\Phi(z)] = A = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1.5)$$

Calculating the values of du/dx and $\partial v/\partial y$ from (1.3) we find that the above result is satisfied if we take

$$\Phi(z) = \frac{2(1-2\sigma)}{3-4\sigma} [g_1'(z) + g_2'(z)], \quad (1.6)$$

primes indicating that the functions have been differentiated with respect to z . Since $g_1(z)$ and $g_2(z)$ are supposed to be known, the value of $\Phi(z)$ is given by (1.6) and hence from (1.3), u and v are completely determined.

2. Example

Suppose in an infinite plate, there is a centre of dilatation in the form of a nucleus of thermo-elastic strain at a point $A(c, 0)$, c being greater than the radius a of the hole. The boundary of the hole is supposed to be rigidly fixed. Components of displacement due to such a nucleus are [1]

$$u_1 = k \frac{\partial}{\partial x} (\log r_1), \quad v_1 = k \frac{\partial}{\partial y} (\log r_1), \quad (2.1)$$

where k is a known constant and

$$r_1^2 = (x-c)^2 + y^2. \quad (2.2)$$

Let B be the inverse point of A with respect to the circle, and R_1, R_2 , the distances of a point P on the circle from A and B respectively. Then

$$\left. \begin{aligned} [u_1]_{r=a} &= k \left[\frac{x-c}{R_1^2} \right]_{r=a} = k \frac{a^2}{c^2} \left[\frac{x-c}{R_2^2} \right]_{r=a} = -\frac{k}{c} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{z}{z-a^2/c} \right) \right]_{r=a}, \\ [v_1]_{r=a} &= k \left[\frac{y}{R_1^2} \right]_{r=a} = k \frac{a^2}{c^2} \left[\frac{y}{R_2^2} \right]_{r=a} = \frac{k}{c} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{iz}{z-a^2/c} \right) \right]_{r=a}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

If the circular boundary of the hole be rigidly fixed, we are to find u_2, v_2 from (1.3) such that

$$\left. \begin{aligned} [u_2]_{r=a} &= -[u_1]_{r=a} = -\frac{k}{c} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{z}{z-a^2/c} \right) \right]_{r=a}, \\ [v_2]_{r=a} &= -[v_1]_{r=a} = -\frac{k}{c} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{iz}{z-a^2/c} \right) \right]_{r=a}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Thus we can put in (1.3)

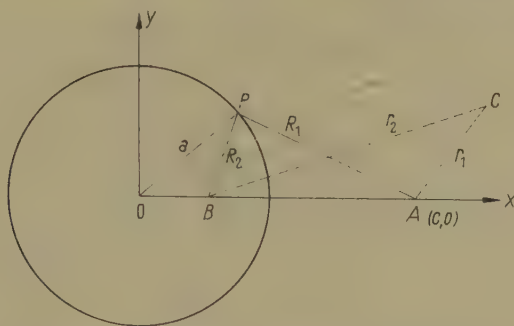
$$g_1(z) = \frac{k}{c} \left[1 + \frac{a^2}{c} \cdot \frac{1}{(z-a^2/c)} \right], \quad g_2(z) = -\frac{ik}{c} \left[1 + \frac{a^2}{c} \cdot \frac{1}{(z-a^2/c)} \right]. \quad (2.5)$$

Hence from (1.6)

$$\Phi(z) = -\frac{4ka^2(1-2\sigma)}{c^2(3-4\sigma)} \cdot \frac{1}{(z-a^2/c)^2}. \quad (2.6)$$

Substituting the values of $\Phi(z)$, $g_1(z)$ and $g_2(z)$ from (2.6) and (2.5) into (1.3) we get u_2 and v_2 . Values of displacement will then be given by

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2. \quad (2.7)$$



A circular hole with fixed edge in an infinite plate.

REFERENCES

- [1] J. N. GOODIER, *Phil. Mag.* 23, 1017 (1937).
 [2] B. SEN, *Proc. Roy. Soc., Lond. [A]* 187, 87 (1946).

Zusammenfassung

Zweck dieser Mitteilung ist die Herleitung einer direkten Methode für die Lösung des zweiten Randwertproblems in einer elastischen Scheibe mit kreisförmiger Begrenzung. Zur Veranschaulichung der Methode wird das Problem der unendlichen Scheibe mit einer thermoelastischen Verzerrungsquelle in endlichem Abstand von einem kreisförmigen Loch mit fixiertem Rand gelöst.

(Received: February 4, 1957.)

Elementare Fälle des Dirichletschen Problems für elliptische Gebiete der Ebene

Von VÁCLAV VODIČKA, Pilsen, CSR

Es ist nicht allgemein bekannt, dass und wie sich manche interessante Probleme der Laplaceschen Gleichung auf ganz elementarem Wege lösen lassen. Das zugehörige Verfahren soll hier für den Fall spezieller Bedingungen auf der Peripherie eines elliptischen Grundgebietes durchgeführt werden.

1. *Problemstellung.* Es sei $f(x, y)$ ein Polynom vom beliebigen Grade $n \geq 0$. Man fragt nach der Lösung $u(x, y)$ der Potentialaufgabe:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{im Gebiete} \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \leq 0, \\ u(x, y) &= f(x, y) \quad \text{auf der Ellipse} \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2. *Lösung.* Die Grundlage zur elementaren Behandlung unseres Problems bilden zwei bekannte Sätze der Algebra, die wir ohne Beweis in einer für folgende Zwecke passenden Form aussprechen wollen.

Satz 1. Ein Polynom $\varphi(x, y)$ n -ten Grades hat dann und nur dann überall auf der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ den Wert Null, wenn

$$\varphi(x, y) = (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) \psi(x, y); \quad (2)$$

hierbei ist $\psi(x, y)$ beliebiges Polynom vom Grade $n - 2$, falls $n \geq 2$ und $\psi(x, y) \equiv 0$ für $n \leq 1$.

Satz 2. Weiss man, dass ein Polynom $\varphi(x, y)$ n -ten Grades ($n \geq 0$) mit der ganzen rationalen Funktion $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2$ mindestens $2n + 1$ verschiedene Nullstellen gemeinsam hat, so ist $\varphi(x, y) = 0$ überall auf der Ellipse

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0,$$

und nach Satz 1 lässt sich dann $\varphi(x, y)$ in der Form (2) ausdrücken.

Mit einer Nullstelle irgendeiner Funktion $F(x, y)$ meinen wir natürlich jedes Zahlenpaar (x, y) mit der Eigenschaft $F(x, y) = 0$.

Nunmehr kehren wir wieder zum Problem (1) zurück und setzen die Lösung $u(x, y)$ mit noch unbekannten $2n + 1$ Koeffizienten $\gamma_0, \gamma_v, \gamma'_v$ ($v = 1, 2, 3, \dots, n$) in der Form

$$u(x, y) = \gamma_0 + \sum_{v=1}^n [\gamma_v p_v(x, y) + \gamma'_v q_v(x, y)] \quad (3)$$

voraus. Hierin sind

$$p_v(x, y) = \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{v}{2}\right]} (-1)^\lambda \binom{v}{2\lambda} x^{v-2\lambda} y^{2\lambda}, \quad q_v(x, y) = \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{v-1}{2}\right]} (-1)^\lambda \binom{v}{2\lambda+1} x^{v-2\lambda-1} y^{2\lambda+1} \quad (3.1)$$

die durch

$$(x + i y)^v = p_v(x, y) + i q_v(x, y) \quad (3.2)$$

definierten harmonischen Grundpolynome, und $[r]$ bedeutet ganz allgemein den ganzen Teil der Zahl r .

Die Beiwerte γ aus (3) bestimmen sich nun einfach aus dem linearen Gleichungssystem

$$u(x_s, y_s) = \gamma_0 + \sum_{v=1}^n [\gamma_v p_v(x_s, y_s) + \gamma'_v q_v(x_s, y_s)] = f(x_s, y_s) \quad (s = 1, 2, \dots, 2n + 1),$$

worin (x_s, y_s) ; $s = 1, 2, \dots, 2n + 1$ beliebige untereinander verschiedene Punkte der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ sind. In allen praktisch wichtigen Fällen sind die (x_s, y_s) immer so wählbar, dass die Beziehungen (4) und damit auch alle folgenden Rechnungen verhältnismässig einfach ausfallen.

Es ist leicht einzusehen, dass die Gleichungen (4) lösbar sind, und das Ergebnis der Einsetzung der daraus berechneten Werte γ in (3) schreibt sich dann in Form der Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} 1, p_1(x, y), & q_1(x, y), & p_2(x, y), & q_2(x, y), & \dots, & p_n(x, y), & q_n(x, y), & u(x, y) \\ 1, p_1(P_1), & q_1(P_1), & p_2(P_1), & q_2(P_1), & \dots, & p_n(P_1), & q_n(P_1), & f(P_1) \\ 1, p_1(P_2), & q_1(P_2), & p_2(P_2), & q_2(P_2), & \dots, & p_n(P_2), & q_n(P_2), & f(P_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, p_1(P_{2n}), & q_1(P_{2n}), & p_2(P_{2n}), & q_2(P_{2n}), & \dots, & p_n(P_{2n}), & q_n(P_{2n}), & f(P_{2n}) \\ 1, p_1(P_{2n+1}), & q_1(P_{2n+1}), & p_2(P_{2n+1}), & q_2(P_{2n+1}), & \dots, & p_n(P_{2n+1}), & q_n(P_{2n+1}), & f(P_{2n+1}) \end{vmatrix} = 0.$$

Natürlich ist hierbei

$$p_v(P_s) = p_v(x_s, y_s), \quad q_v(P_s) = q_v(x_s, y_s), \quad f(P_s) = f(x_s, y_s).$$

Dass die durch (5) dargestellte Funktion $u(x, y)$ wirklich die gesuchte Lösung angibt, sieht man leicht folgendermassen ein: Erstens ist $u(x, y)$ nach (3) ein in der ganzen Ebene harmonisches Polynom n -ten Grades. Weiter haben nach (4) die beiden Polynome $u(x, y) - f(x, y)$, $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2$ alle $2n + 1$ Punkte (x_s, y_s) als gemeinsame Nullstellen. Da $u(x, y) - f(x, y)$ vom höchstens n -ten Grade ist, so hat man nach Satz 2 wirklich $u(x, y) - f(x, y) = 0$ längs der ganzen Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$.

Nach demselben Satz 2 lässt sich unsere durch (5) definierte Lösung auch in der Form

$$u(x, y) = f(x, y) + (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) \psi(x, y) \quad (6)$$

schreiben. Dabei ist $\psi(x, y)$ ein passendes Polynom vom höchstens $(n - 2)$ -ten Grade, oder $\psi(x, y) \equiv 0$. Die genaue Bestimmung von $\psi(x, y)$ ist in konkreten Fällen nicht schwer, wie sich noch weiter zeigen wird.

3. *Tabelle der Polynome* (3.1). Die ersten 10 Paare von Polynomen (3.1) sind:

$$\left. \begin{array}{ll} p_1 = x & q_1 = y \\ p_2 = x^2 - y^2 & q_2 = 2xy \\ p_3 = x^3 - 3xy^2 & q_3 = 3x^2y - y^3 \\ p_4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 & q_4 = 4x^3y - 4xy^3 \\ p_5 = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 & q_5 = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 \\ p_6 = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6 & q_6 = 6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5 \\ p_7 = x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6 & q_7 = 7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7 \\ p_8 = x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8 & q_8 = 8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^3y^5 - 8xy^7 \\ p_9 = x^9 - 36x^7y^2 + 126x^5y^4 - 84x^3y^6 + 9xy^8 & q_9 = 9x^8y - 84x^6y^3 + 126x^4y^5 - 36x^2y^7 + y^9 \\ p_{10} = x^{10} - 45x^8y^2 + 210x^6y^4 - 210x^4y^6 + 45x^2y^8 - y^{10} & q_{10} = 10x^9y - 120x^7y^3 + 252x^5y^5 - 120x^3y^7 + 10xy^9 \end{array} \right\} \quad (7)$$

4. *Beispiele*. Es soll jetzt obige Theorie auf einigen Beispielen erläutert werden.

4. 1. Ist $f(x, y)$ selbst ein harmonisches Polynom, so folgt aus (6) für $\psi(x, y)$ die Bedingung

$$\Delta [(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) \psi(x, y)] = 0,$$

welche im ganzen Gebiet $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \leq 0$ erfüllt sein soll. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn das Polynom in der eckigen Klammer identisch verschwindet, das heisst $\psi(x, y) \equiv 0$.

Im Sinne von (6) kommt man so zum folgenden (hier freilich fast trivialen) Ergebnis: Ist $f(x, y)$ beliebiges harmonisches Polynom, so lautet die Lösung $u(x, y)$ des Problems (1) ganz einfach

$$u(x, y) = f(x, y).$$

Insbesondere gehören hierher die häufigen Fälle

$$f(x, y) = f_{00}, \quad f(x, y) = f_{00} + f_{10}x + f_{01}y$$

mit beliebigen konstanten f_{ik} .

Im weiteren kann man sich also auf nichtharmonische Polynome $f(x, y)$ beschränken.

4. 2. Es sei

$$f(x, y) = f_{00} + f_{10} x + f_{01} y + f_{20} x^2 + f_{11} x y + f_{02} y^2;$$

f_{ik} gegebene Festwerte.

Mit den 5 Punkten

$$(\pm a, 0), \quad (0, \pm b), \quad (\alpha, \alpha); \quad \alpha = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

der Randellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ lautet die Gleichung (5) [siehe auch (7)]:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1, & x, & y, & x^2 - y^2, & xy, & u(x, y) \\ 1, & a, & 0, & a^2, & 0, & f_{00} + a f_{10} + a^2 f_{20} \\ 1, & -a, & 0, & a^2, & 0, & f_{00} - a f_{10} + a^2 f_{20} \\ 1, & 0, & b, & -b^2, & 0, & f_{00} + b f_{01} + b^2 f_{02} \\ 1, & 0, & -b, & -b^2, & 0, & f_{00} - b f_{01} + b^2 f_{02} \\ 1, & \alpha, & \alpha, & 0, & \alpha^2, & f_{00} + \alpha (f_{10} + f_{01}) + \alpha^2 (f_{20} + f_{11} + f_{02}) \end{array} \right| = 0.$$

Mit einiger Rechenarbeit ergibt sich daraus die nicht allgemein bekannte Lösung

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) = f_{00} + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (f_{20} + f_{02}) + f_{10} x + f_{01} y \\ + \frac{a^2 f_{20} - b^2 f_{02}}{a^2 + b^2} (x^2 - y^2) + f_{11} xy. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Für den Spezialfall $b = a$ erhält man die Lösungsform

$$u(x, y) = f_{00} + \frac{a^2}{2} (f_{20} + f_{02}) + f_{10} x + f_{01} y + \frac{1}{2} (f_{20} - f_{02}) (x^2 - y^2) + f_{11} xy \quad (8.1)$$

des Dirichletschen Problems für den Kreis mit dem Radius a .

Bemerkung. Das Ergebnis (8) folgt in ein wenig anderer Gestalt

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) = f_{00} + f_{10} x + f_{01} y + f_{20} x^2 + f_{11} xy + f_{02} y^2 \\ - \frac{f_{20} + f_{02}}{a^2 + b^2} (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

viel schneller aus (6).

4. 3. Für den Fall

$$f(x, y) = f_{00} + f_{10} x + f_{01} y + f_{20} x^2 + f_{11} xy + f_{02} y^2 \\ + f_{30} x^3 + f_{21} x^2 y + f_{12} xy^2 + f_{03} y^3.$$

führt der Ansatz (6), das heisst

$$u(x, y) = f(x, y) + (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) (c_{00} + c_{10} x + c_{01} y),$$

zur Bedingung

$$f_{20} + f_{02} + (3 f_{30} + f_{12}) x + (f_{21} + 3 f_{03}) y + 2 (c_{10} b^2 x + c_{01} a^2 y) \\ + (a^2 + b^2) (c_{00} + c_{10} x + c_{01} y) = 0,$$

die im ganzen Gebiete $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \leq 0$ erfüllt sein soll.

Dies ist der Fall, wenn und nur wenn

$$\begin{aligned} c_{00} (a^2 + b^2) + f_{20} + f_{02} &= 0, & c_{10} (a^2 + 3b^2) + f_{12} + 3f_{30} &= 0, \\ c_{01} (3a^2 + b^2) + 3f_{08} + f_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Mit den daraus berechneten Werten von c_{ik} ergibt sich dann die Lösung

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= f_{00} + f_{10}x + f_{01}y + f_{20}x^2 + f_{11}xy + f_{02}y^2 \\ &+ f_{30}x^3 + f_{21}x^2y + f_{12}xy^2 + f_{03}y^3 \\ &- \left(\frac{f_{20} + f_{02}}{a^2 + b^2} + \frac{f_{12} + 3f_{30}}{a^2 + 3b^2}x + \frac{3f_{03} + f_{21}}{3a^2 + b^2}y \right) (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Technisch sind unsere Ausführungen überall dort von Interesse (Elektrostatik, Wärmeleitung usw.), wo man mit der Laplaceschen Gleichung zu tun hat.

Es ist zu bemerken, dass sich auch andere Fragen der mathematischen Physik, insbesondere unter gewissen Umständen das Poissonsche Problem

$$\Delta u = f(x, y), \quad u = 0 \text{ am Rande des Grundgebietes}$$

nach der vorangehenden Methode lösen lassen.

Summary

The Dirichlet problem is solved for an elliptic domain if the boundary values are given by a polynomial defined in the interior of the ellipse. The solution is a finite expansion in harmonic polynomials.

(Eingegangen: 17. Dezember 1956.)

Varia - Miscellaneous - Divers

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 4. bis 5. Mai 1957 in Brunnen

Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik

Ein Widerstandsbrett für rotationssymmetrische Potentialprobleme. Von E. BAUMGARTNER, R. GALLI und P. HUBER, Basel¹⁾.

Seit der praktischen Realisierung von Widerstandsnetzwerken durch DE PACKH²⁾ und REDSHAW³⁾ wurde diese Art Analogierechenggerät auch auf kompliziertere Differentialgleichungen mit Erfolg angewendet⁴⁾. Diese Methode bietet gegenüber dem elektrolytischen Trog hauptsächlich den Vorteil grösserer Genauigkeit und einfacherer Handhabung. Ein scheinbarer Nachteil tritt aber bei krummen Oberflächen auf, weil ohne jeweilige Abänderung der Anordnung nur diskrete Knotenpunkte zur Verfügung stehen.

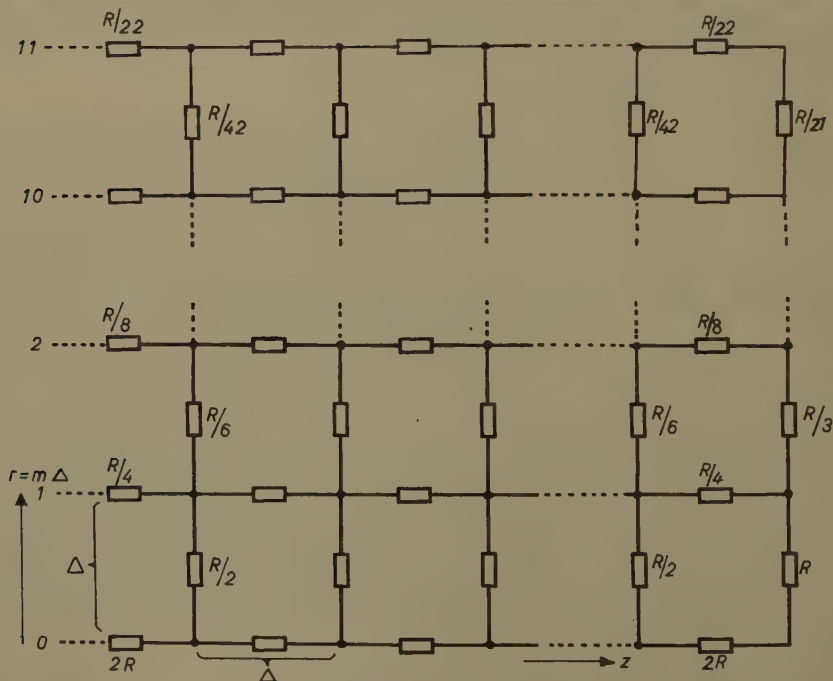
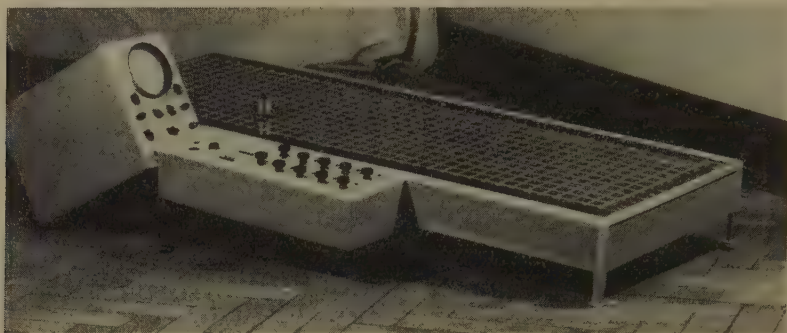
¹⁾ Physikalisches Institut der Universität.

²⁾ D. C. DE PACKH, Rev. sci. Instrum. 18, 798 (1947).

³⁾ S. C. REDSHAW, Proc. Instn. mech. Engrs., Lond. 159, 25 (1948).

⁴⁾ C. LIEBMANN, J. int. Calc. analog. 1955, 346.

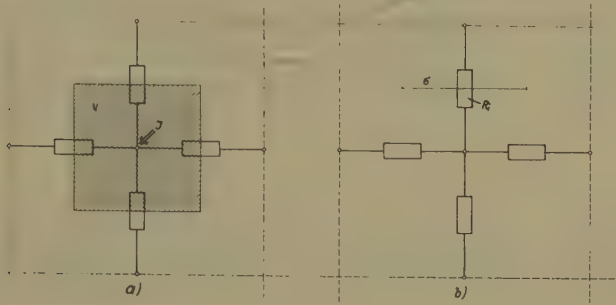
In Figur 1 ist neben dem Prinzipschema eines solchen Widerstandsnetzwerkes dessen praktische Realisierung dargestellt. Bei einem bestimmten Problem werden entsprechend den Randbedingungen Potentiale auf das Brett aufgedrückt, dann stellt sich in den anderen Punkten eine angenäherte Lösung der Laplace-Gleichung ein. Alle Widerstände des Netzwerkes wurden mit Konstantandraht auf hochohmigen Widerständen als Wickelkörper gewickelt, und zwar auf $\pm 1,5\%$ genau. Eine geeignete Wicklungsart erlaubt die Benützung von Wech-



Figur 1

Widerstandsnetzwerk und Prinzipschema des Netzwerkes. In der radialen r -Richtung sind 11, in der axialen z -Richtung 40 Maschen. $R = 8 \text{ k}\Omega$.

selbstrom (50 Hz), ohne dass Schwierigkeiten wegen Blindwiderständen auftreten. Die Lösung⁵⁾ der allgemeineren Gleichung $\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} V) = -\rho$ erläutert Figur 2.



Figur 2

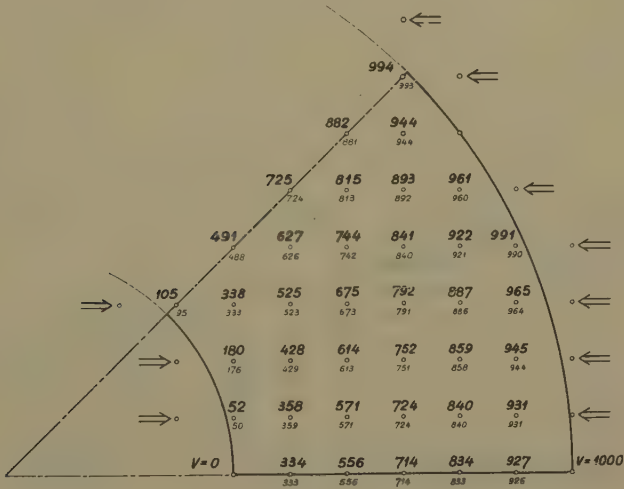
Berücksichtigung von

a) Raumladungen durch die Zuführung von Strömen.

$$J = \frac{4 \pi m}{\epsilon_0 R} \bar{\rho} \Delta^2 \quad (\gamma \neq 0); \quad J = \frac{1}{2 \epsilon_0 R} \bar{\rho} \Delta^2 \quad (\gamma = 0).$$

Hierbei ist $\bar{\rho}$ jeweils der Mittelwert von ρ im eingezeichneten Volumen v .

b) Dielektrizitätskonstanten, jeweils durch Ersetzen des Widerstandes R_i durch $R_i/\bar{\epsilon}$, wobei $\bar{\epsilon}$ der Mittelwert von ϵ auf der Oberfläche σ ist.



Figur 3

Potentialverteilung von zwei konzentrischen Kugeln. Die Pfeile bedeuten Stromzuführungen. Die oberen Zahlen sind aus gemessenen Werten ermittelt, die unteren sind die theoretischen Sollwerte.

⁵⁾ C. LIEBMANN, Brit. J. appl. Physics, 1, 92 (1956).

Randbedingungen, die nicht auf Knotenpunkte fallen, werden wesentlich rascher durch Zusatzströme realisiert als durch Widerstandsabänderung. Durch genügend hochohmige Potentiometer (auf das Brett aufsteckbar), deren Abgriff auf den Berandungsort eingestellt wird, lässt sich leicht der notwendige Strom einstellen. In Figur 3 wird dies durch ein Testproblem illustriert. In diesem wurde der Maschenfehler durch Ausmessen des Problems in einem halb so grossen Maßstab weitgehend eliminiert.

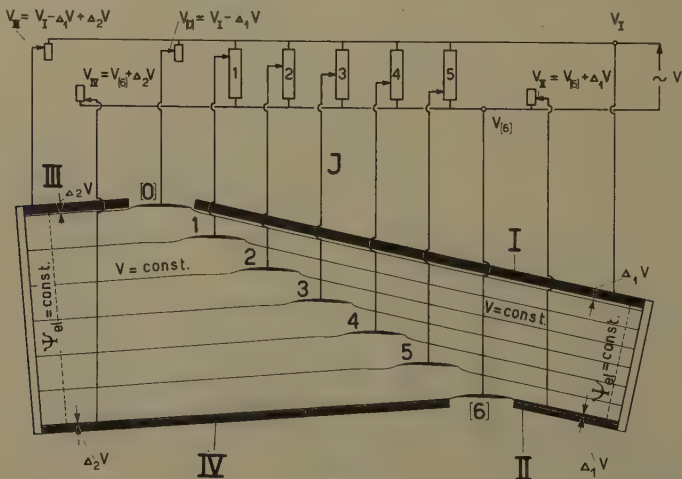
Das Brett wird jetzt für ionenoptische Probleme im Zusammenhang mit dem Bau eines Beschleunigers verwendet.

Zur Theorie der Flügelgitter. Von L. MEYER, Zürich¹⁾.

Seit längerer Zeit beschäftigt sich das Institut für Aerodynamik der ETH mit der Berechnung von Schaufelprofilen für axiale Turbomaschinen. Da bei den Rechnungen von reibungsfreier Strömung (Potentialströmung) ausgegangen wird, werden die Experimente zur Prüfung der Theorie mit der Methode der elektrolytischen Analogie durchgeführt. Der ebene Trog enthält eine endliche Anzahl Profile des ebenen Gitters; als Berandungen werden je zwei Stromlinien und eine Potentiallinie der An- und Abströmung materialisiert. Der aerodynamischen Zirkulation jeder Schaufel muss eine elektrische Periodizität entsprechen: man verwendet daher die konjugierte Analogie

$$\Phi_{aer} \rightarrow \Psi_{el}; \quad \Psi_{aer} \rightarrow -\frac{1}{\sigma/h} \Phi_{el}$$

(σ = spez. Widerstand, h = Höhe der leitenden Schicht). Der Zirkulation Γ entspricht dann der Strom J durch die Schaufeln; diese, gespeist durch Potentiometer, sind als Elektroden ausgebildet, ebenso die die Stromlinien darstellenden Wände, während die senkrechten Abschlüsse der letzteren aus Isoliermaterial bestehen (Figur 1). Die Messungen bezwecken die Prüfung des Umlenkverhaltens



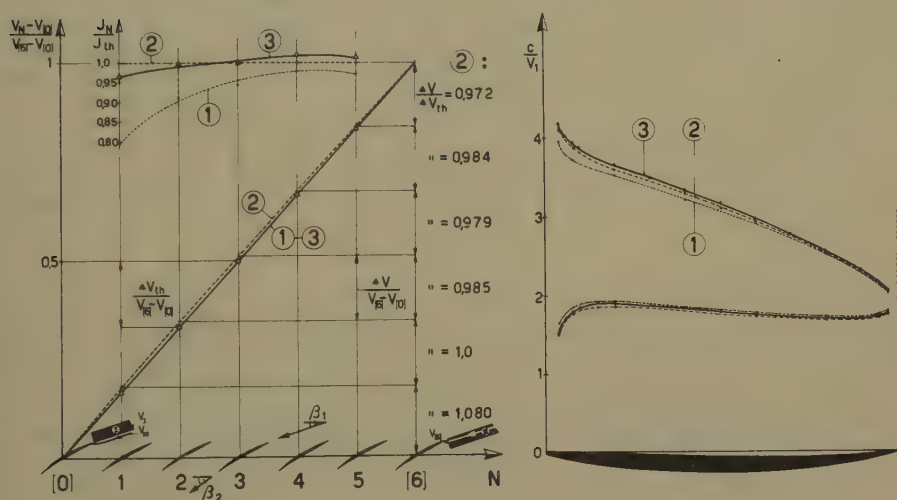
(Abströmwinkel) des Gitters bei verschiedenen Anströmwinkeln sowie die Kontrolle der berechneten Geschwindigkeitsverteilungen am Profil.

Es hat sich gezeigt, dass neben grosser Genauigkeit der geometrischen Anordnung eine sorgfältige Einstellung der Randbedingungen des elektrischen Feldes notwendig ist. Die Periodizität verlangt gleiche Spannungsdifferenzen von Schaufel zu Schaufel, sowie gleiche Ströme J durch alle freistehenden Schaufeln. Sind β_1 und β_2 die Zu- und Abströmwinkel in bezug auf die Gitterrichtung, so bedingt die Analogie von I und J ferner, dass

$$J = \frac{I_{[0]} - I_{[6]}}{\sigma/h (N+1)} |(\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1)| = J_{th}$$

sein sollte (N = Anzahl freistehender Schaufeln, hier zum Beispiel 5; σ/h wurde während des Versuchs mit einem aus 2 coaxialen Zylindern bestehenden, in²⁾ beschriebenen Apparat gemessen). Figur 2 zeigt links Spannung und Strom der

$$\beta_1 = 18,2^\circ$$



$$\begin{aligned} 1 \quad & \frac{\Delta_1 I}{I_{[0]} - I_{[6]}} = 0; \quad \Delta I = \Delta I_{th} : J_N \neq J_{th} \\ 2 \quad & \frac{\Delta_1 V}{I_{[0]} - I_{[6]}} = 0; \quad J_N = J_{th} : \Delta V \neq \Delta V_{th} \\ 3 \quad & \frac{\Delta_1 V}{V_{[0]} - V_{[6]}} = 0,015; \quad \Delta V = \Delta V_{th} : J_3 = J_{th}; \quad J_{1,2,4,5} \approx J_{th} \end{aligned}$$

Figur 2

Links Spannung und Strom der Schaufeln, rechts Geschwindigkeitsverteilung entlang der mittleren Schaufel für 3 Stadien der Einstellung des elektrischen Feldes.

²⁾ P. DE HALLER, *Anwendung der elektrischen Analogie zur Untersuchung von Schaufelgittern*, Techn. Rdsch. Sulzer 1947, Nr. 3/4.

Schaufeln, rechts die auf Grund der Analogie mit einer Sonde gemessene Geschwindigkeitsverteilung³⁾ an der mittleren Schaufel für drei Stadien der Einstellung des elektrischen Feldes. Bei den Einstellungen ① und ② wurden die aerodynamischen Stromlinien der Randschaufeln mit den bei deren Nase und Hinterkante beginnenden geraden Begrenzungsplatten identifiziert. Nach Erfüllung der Periodizitätsbedingung für die Spannung (Einstellung ①) ergab sich zunächst ungenügende Periodizität und Grösse der Schaufelströme; an der mittleren Schaufel wurde etwa 6% zu wenig Strom gemessen, welches Manko sich in einem zu kleinen Integral der über der abgewinkelten Profilkontur aufgetragenen Geschwindigkeitsverteilung äussert. Bei Einstellung ② wurden die Ströme durch alle freistehenden Schaufeln auf den geforderten Betrag einreguliert; hierbei musste auf die strenge Periodizität der Schaufelspannungen verzichtet werden. Bei Einstellung ③ wurde nun berücksichtigt, dass die Schaufelstromlinien wegen ihrer Krümmung in Schaufelnähe auch in grösserer Entfernung von den Schaufeln im allgemeinen nicht mit den zu ihnen parallelen Geraden durch Nase und Hinterkante der Profile zusammenfallen, sondern gegenüber diesen etwas verschoben sind. Diese Verschiebung wurde für die Stromlinien der Randschaufeln durchgeführt, wobei von den beiden Möglichkeiten der mechanischen oder elektrischen Verschiebung die letztere einfacher zu realisieren war (siehe Figur 1). Während die Theorie für das vorliegende Gitter eine vernachlässigbar kleine Verschiebung $\Delta_2 V$ der Stromlinien der Abströmung ergab, wurde die mit grösserem Anstellwinkel zunehmende Verschiebung $\Delta_1 V$ jeweils so eingestellt, dass bei strenger Periodizität der Schaufelspannungen die mittlere Schaufel vom richtigen Strom J_{th} durchflossen wurde. Aus Figur 2 geht hervor, dass dann auch die Ströme durch die übrigen Schaufeln, insbesondere durch die der mittleren Schaufel benachbarten, den geforderten Wert bis auf einen kleinen Bruchteil erreichten.

Farbmetrische Kennzeichnung von Farbstoffen. Von E. GANZ, Basel¹⁾.

Das farbmetrische System der internationalen Beleuchtungskommission (IBK) hat sich zur objektiven Kennzeichnung von Färbungen, Anstrichen und farbigen Lichtern bewährt; es eignet sich aber nicht zur Charakterisierung von Farbstoffen, da dessen Koordinaten nicht den färberischen Begriffen von Farbstärke und Reinheit eines Farbstoffes entsprechen. Die Darstellung der Farborte der Ausfärbungen eines Farbstoffes in zunehmender Konzentration ergibt Kurven, die vom nahezu weissen, ungefärbten Substrat bei stetig abnehmender Helligkeit bis zu einem Sättigungsmaximum führt und bei weiterer Steigerung der Farbstoffkonzentration mit abnehmender Sättigung gegen den Schwarzpunkt läuft [1]²⁾. Diese Kurven gleicher Farbstoffreinheit stellen mit den Kurven gleicher färberischer Stärke das zur Farbstoffkennzeichnung geeignete Koordinatensystem dar. Wir haben versucht, dieses Farbsystem aus dem System der IBK auf Grund folgender einfacher Idealisierungen der physikalischen Eigenschaften von Farbstoff und Ausfärbung zu berechnen:

1. Der Verlauf der Extinktion ϵ_λ der farbbedingenden Absorptionsbande wird durch eine Gaußsche Verteilungsfunktion mit der Bandenmitte λ_0 und der Halb-

³⁾ Die Bezugsgeschwindigkeit V_1 ($= V_2$) ist hier die zur Gitterrichtung normale Komponente der Eintrittsgeschwindigkeit C_1 .

¹⁾ CIBA AG.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 323.

wertsbreite β dargestellt:

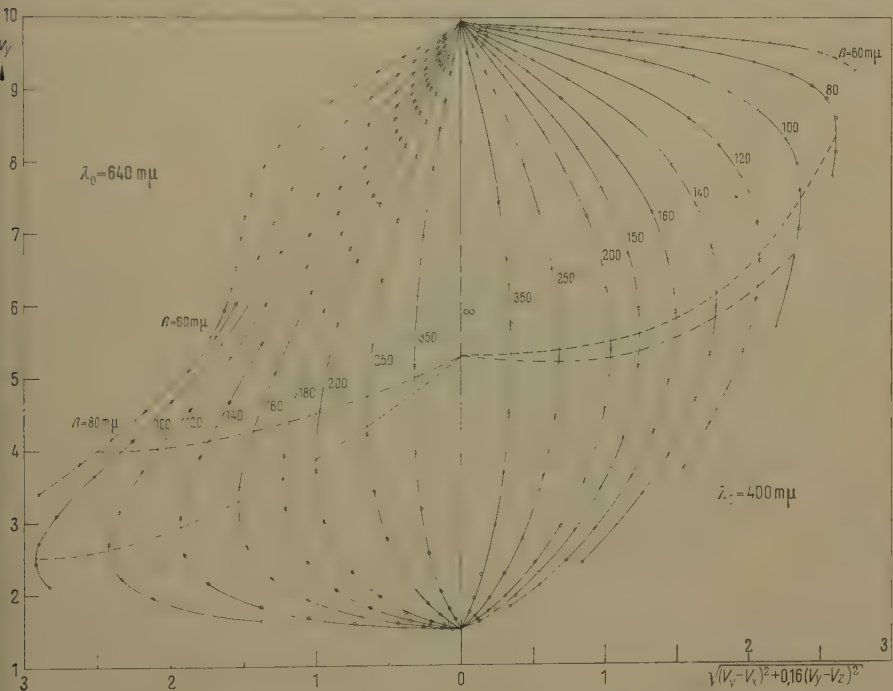
$$\epsilon_{\lambda} = \epsilon_0 \cdot 2^{-[\frac{2(\lambda_0 - \lambda)}{\beta}]^2}$$

2. Die Remission R der Färbungen als Funktion von Extinktion ϵ_0 und Farbstoffkonzentration c wird mit einer modifizierten Formel nach KUBELKA-MUNK [2]-PINEO [3] dargestellt, wobei r die Oberflächenremission des schwarzgefärbten Substrates bedeutet:

$$R_{\lambda} = 1 - (1 - r) \left(\sqrt{K_{\lambda}^2 + 2 K_{\lambda}} - K_{\lambda} \right); \quad K_{\lambda} = c \epsilon_{\lambda}.$$

r wurde hier (für Textilien) = 0,02 gesetzt [4].

3. Die IBK-Farbwerte dieser idealisierten Färbungen wurden mit einem IBM-Rechenlocher 604, Modell 4, durch Summation bei einem Wellenlängeninkrement von 3 m μ für 21 über das sichtbare Spektrum verteilte Banden (λ_0) bei je 10 Halbwertsbreiten (β) im Bereich von 60 bis 350 m μ und je 18 über einen Bereich von $5 \cdot 10^5$ gestuften Farbstoffkonzentrationen (c), das heisst 3780mal berechnet. Die erhaltenen Farben bedecken den Bereich von Gelb über Orange, Rot, Purpur, Violett bis Blau. Die Ergänzung des fehlenden Bereiches von Blau über Grün zu Gelb, der sich nicht durch eine einfache Absorptionsbande erzeugen



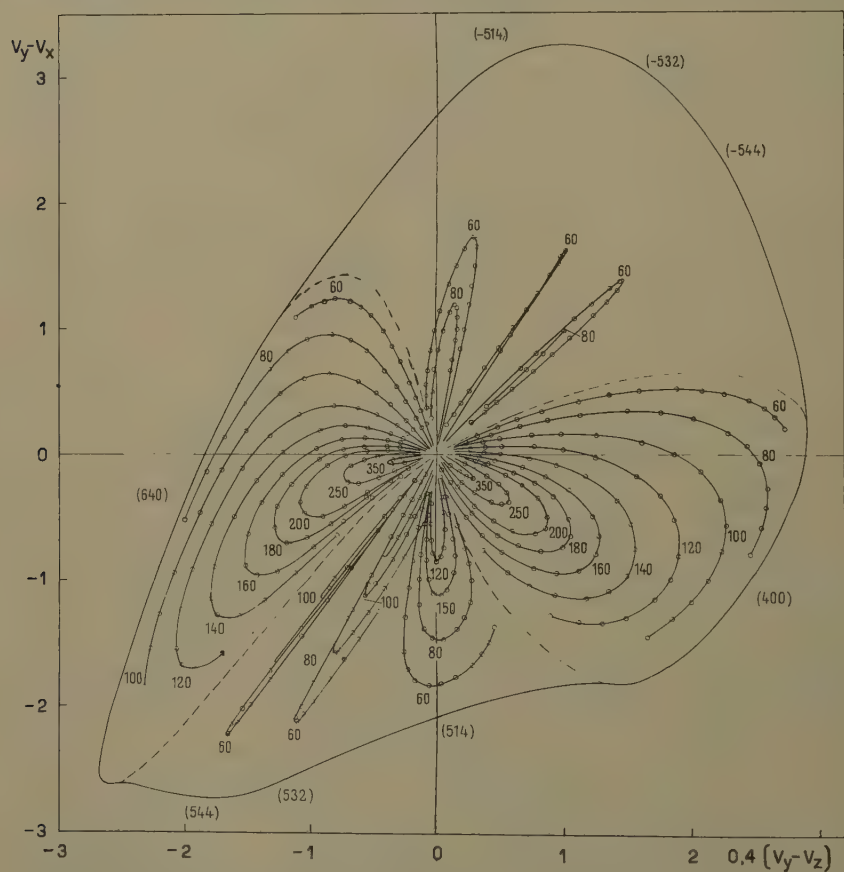
Figur 1

Idealisierte Färbungen von Farbstoffen verschiedener Halbwertsbreite mit den Bandenmitten 400 m μ (Gelb) bzw. 640 m μ (Blau). — — — Kurve maximaler Sättigung; - · - · - Kurve maximaler Relativ-Sättigung.

lässt, wurde sowohl durch analoge Berechnungen mit Doppelbanden (Halbwertsbreite der Lücke gleich Bandenhalbwertsbreite) sowie mit Rechnungen komplementärer Farbwerte erreicht.

Die Schar der erhaltenen Kurven mit der Halbwertsbreite β als Parameter sind die gesuchten Koordinaten gleicher färberischer Reinheit für alle Farbstoffe der Bandenmitte λ_0 (Figur 1). Sie bedecken von Grau mit $\beta = \infty$ den ganzen möglichen Farbraum bis zu den Schrödingerschen Optimalfarben [5] für $\beta \rightarrow 0$. Damit wird die Kennzeichnung von Reinheit und Farbton eines Farbstoffes durch die Angabe von β und λ_0 möglich.

4. Zur Kennzeichnung der färberischen, durch Richttypfärbungen definierten Farbstärke verbleiben von den 4 Parametern λ_0 , β , ε_0 und c der idealisierten Färbungen noch die beiden letzteren. Es erweist sich als zweckmässig, die Maximalextinktion ε_0 der idealisierten Farbstoffe so zu normieren, dass bei $c = 0$



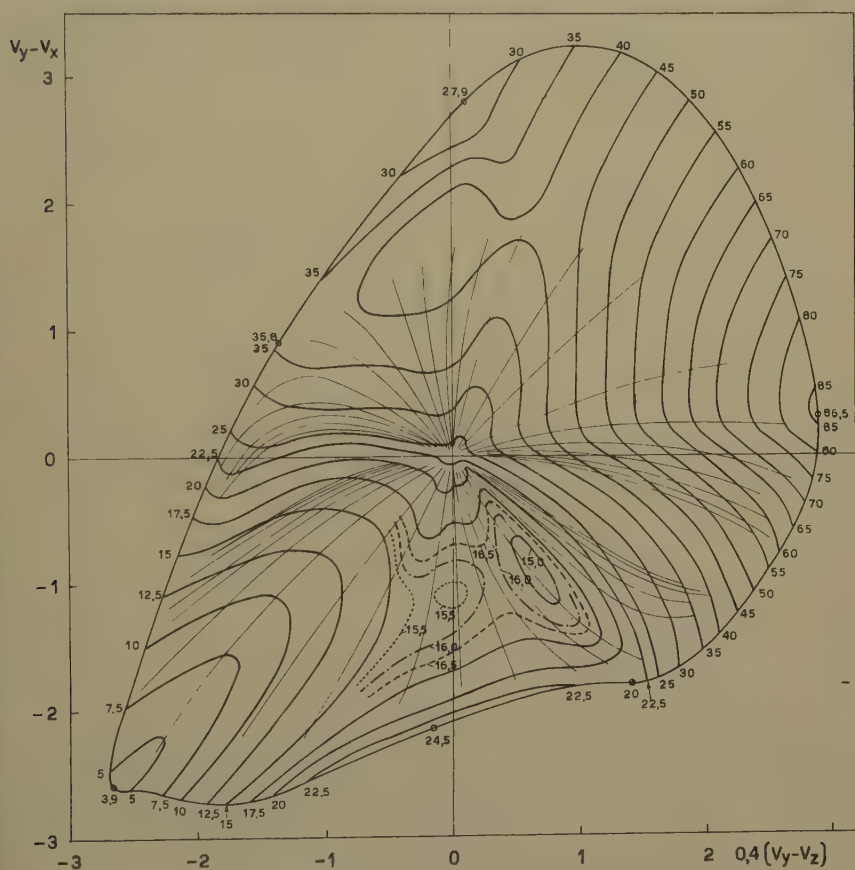
Figur 2

«Chromatic values» idealisierter Färbungen mit umschliessendem Reinstfarbentzug (Optimalfarben grösster Sättigung).

Weiss und $c \rightarrow \infty$ « Schwarz » die Konzentration $c = 1$ die Richttypstärke K^* ergibt. Dann ist die reziproke, zur Erreichung der Richttypstärke erforderliche Konzentration $1/c^*$ eines realen Farbstoffes gerade die in Einheiten der normierten idealisierten Farbstärke ε_0 gemessene Farbstärke ε_0^* .

$$c^* \varepsilon_0^* = K^* = 1 \varepsilon_0; \quad \frac{1}{c^*} = \frac{\varepsilon_0^*}{\varepsilon_0}.$$

5. Die Richttypstärke ist als empfindungsmetrischer Begriff im Gegensatz zu den reizmetrisch fassbaren Begriffen von färberischer Reinheit und Farbton erst nach Transformation der Farbwerte in den empfindungsmetrischen Farbraum bestimmbar. Auch frühere Versuche von GODLOVE [6] und KOCH [7] zur empirischen Bestimmung der Richttypstärke als Funktion farbmetrischer Grössen stützen sich direkt oder indirekt auf empfindungsmetrische Systeme. Als empfindungsmetrische Näherung benutzen wir ADAMS « chromatic value » [8] mit V_Y

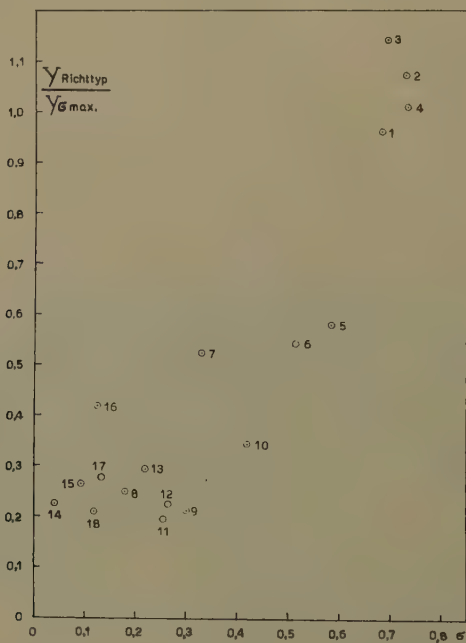


Figur 3

Kurven gleicher Helligkeit Y der Fläche grösstmöglicher Relativ-Sättigung σ_{max} .

als dritter Koordinate (NICKERSON [9]), wobei die Munsell-Transformation der Farbwerte durch eine Parabel 5. Grades [10] wieder mit dem IBM-Rechenlocher und einer IBM-Sortiermaschine durchgeführt wurde. Durch Vertauschen von Abszisse und Ordinate sowie durch Umkehr der Vorzeichen der beiden Koordinaten ergibt sich gegenüber ADAMS eine Darstellung, deren Orientierung analog der Farbtafel der IBK ist (Figur 2). Der mit Farbstoffen einer vorgegebenen idealisierten Halbwertsbreite realisierbare Farbbereich lässt sich hier in bezug auf die gesättigtsten Optimalfarben (Reinstfarbenzug) leicht abschätzen.

6. In diesem angenähert empfindungsmetrischen Farbraum wurde die Fläche der Farborte der mit jedem idealisierten Farbstoff erreichbaren grösstmöglichen Relativsättigung σ_{max} in bezug auf die entsprechende gesättigte Optimalfarbe (Reinstfarbe) graphisch ermittelt (Figur 3). Es ergab sich, dass nur die reinsten 1/1-Richttypfärbungen [7] in dieser Fläche liegen und dass die übrigen Richttypen um so relativ geringere Helligkeiten besitzen, je trüber die verwendeten Farbstoffe sind (Figur 4). Die Arbeiten zur Bestimmung der Richttypfläche im Farbenraum sind noch im Gang; deren Abweichung gegenüber der Fläche grösstmöglicher Relativsättigung erlaubt, den koloristisch als Stärke bewerteten Grau-Anteil abzuschätzen.



Figur 4

Relativhelligkeiten der 1/1-Richttypen auf Wolle, nach KOCH [7] in Abhängigkeit der Relativsättigung σ .

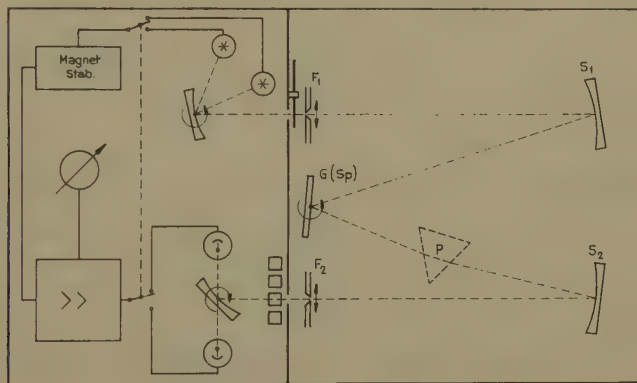
Die Maschinenrechnungen wurden von der Lochkartenabteilung der CIBA AG, Basel (Leitung W. CASPAR), durchgeführt. Die umfangreichen graphischen Arbeiten besorgte V. FRETZ.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] D. B. JUDD, *Color in Business, Science and Industry* (Wiley, New York 1952), S. 291.
- [2] P. KUBELKA und F. MUNK, *Z. tech. Phys.* **12**, 593 (1931).
- [3] O. W. PINEO, U. S. Pat. 2218357 (1939).
- [4] T. VICKERSTAFF, *Proc. Phys. Soc.* **57**, 316 (1945).
- [5] E. SCHRÖDINGER, *Ann. Phys.* **62**, 603 (1920).
- [6] I. H. GODLOVE, *Amer. Dyest. Rep.* **43**, 685 (1954).
- [7] O. KOCH, *Congrès FATIPEC III* (1955), *Melliand Textilber.* **38**, 173 (1957).
- [8] E. Q. ADAMS, *J. opt. Soc. Amer.* **32**, 168 (1942).
- [9] D. NICKERSON, *Amer. Dyest. Rep.* **39**, 541 (1950).
- [10] S. M. NEWHALL, D. NICKERSON und D. B. JUDD, *J. opt. Soc. Amer.* **33**, 417 (1943).

Ein universelles Spektralphotometer. Von J. DURAND und E. LÜSCHER, Lausanne¹⁾.

Es wurde ein photoelektrisches Spektralphotometer konstruiert für einen Spektralbereich von 2100 Å bis 50 000 Å. Ein Schema ist in Figur 1 dargestellt. Der Monochromator, bestehend aus zwei sphärischen Kollimatorspiegeln S_1 und S_2 , dem Diffraktionsgitter G oder einem Planspiegel S_p und einem Prisma P , ist in der Aufstellung von CZERNY und TURNER²⁾.



Figur 1

Prinzipschema Spektralphotometer: F_1, F_2 Eintritts- bzw. Austrittsspalt; S_1, S_2 Kollimatoren; G Plangitter; S_p Planspiegel; P Prisma.

Nach WILHM³⁾ erhält man mit dieser Montage eine Verbreiterung des Bildes des Eintrittspaltes um einen Faktor 1,4, bedingt durch den Astigmatismus der sphärischen Kollimatorspiegel. Das Defilee des Spektrums am Austrittsspalt erfolgt durch Rotation des Diffraktionsgitters um eine senkrechte Achse oder für die Prismenaufstellung durch Rotation des Planspiegels S_p .

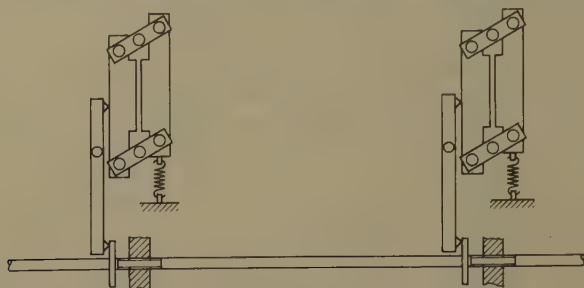
¹⁾ Optisches Labor Metrohm, Lausanne.

²⁾ M. CZERNY und A. F. TURNER, *Z. Phys.* **61**, 792 (1930).

³⁾ H. WILHM, *Opt. Acta* **2**, 50 (1955).

Für den Wellenlängenbereich 2100–6000 Å wird ein Prisma aus homogenisiertem Ultrasil⁴⁾, für den Bereich 4000–9000 Å ein Glasprisma und für das nahe Infrarot ein NPL-Plangitter⁵⁾ verwendet.

Die Breite von Eingangs- und Austrittsspalt kann kontinuierlich zwischen 10 μ und 2 mm verändert werden. Die Einstellung erfolgt symmetrisch und simultan. Der Verstellmechanismus der beiden Spalte ist in Figur 2 dargestellt.



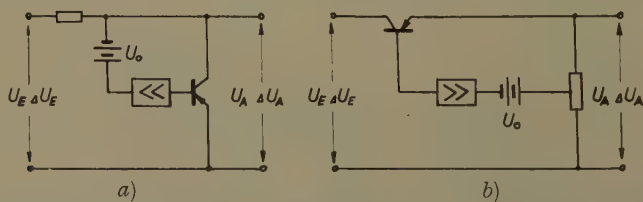
Figur 2
Spaltverstellung.

Als Lichtquellen für die obenerwähnten drei Wellenlängenbereiche wurden Wasserstoff-, Wolframbandlampe und Nernst-Brenner verwendet.

Als Strahlungsempfänger können wahlweise Photozellen, Photomultiplier oder Thermoelemente verwendet werden. Das Lichtbündel wird vor dem Eintrittspalt mit einer rotierenden Scheibe moduliert (11 Hz), was eine Wechselspannungsverstärkung ermöglicht und die Empfänger zugleich unempfindlich macht für nichtmoduliertes Streulicht.

Über stabilisierte Netzgeräte mit Transistoren. Von E. BALDINGER und W. CZAJA, Basel¹⁾.

Stabilisierte Netzanschlussgeräte für niedrige Spannungen und relativ grosse Ströme besitzen für viele Anwendungen ein grosses Interesse. Zur Konstruktion solcher Geräte sind Transistoren wesentlich geeigneter als Röhren. Figur 1 zeigt zwei gebräuchliche und von den Röhrenschaltungen her bekannte²⁾ prinzipielle Anordnungen.



Figur 1

Prinzipielle Stabilisierungsanordnungen. U_0 = Referenzspannung.

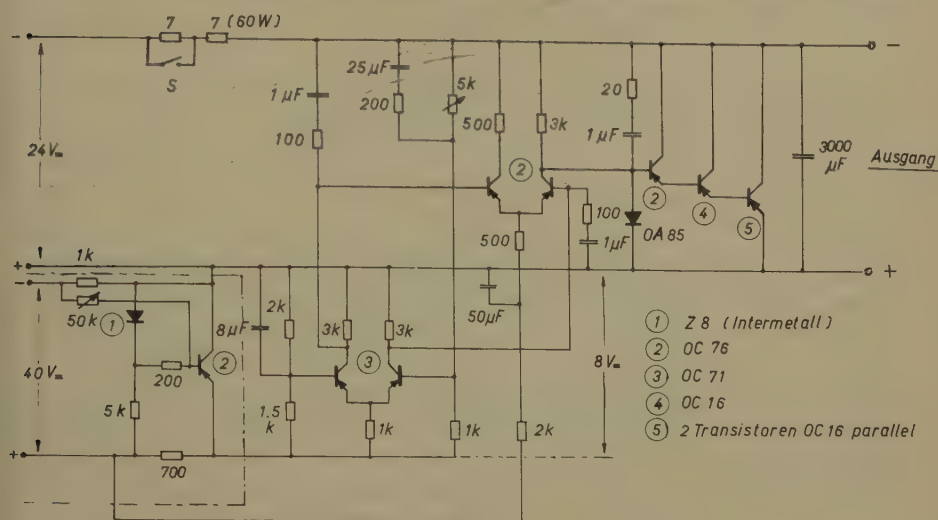
⁴⁾ H. MOHN, *Festschrift Heraeus* (Hanau 1951).

⁵⁾ L. A. SAYCE und G. D. DEW, *Proc. roy. Soc. [A]* 20, 278 (1951).

¹⁾ Physikalisches Institut der Universität, Abteilung für angewandte Physik. — Eine ausführliche Publikation erscheint demnächst in der ZAMP.

²⁾ Vergleiche zum Beispiel F. V. HUNT und R. W. HICKMAN, *Rev. sci. Instrum.* 10, 6–21 (1939).

Es soll am Beispiel eines ausgeführten Netzgerätes gezeigt werden, dass durchaus brauchbare Eigenschaften erzielt werden können. In Figur 2 ist das



Figur 2

Stabilisiertes Transistor-Netzgerät. Der Schalter S reduziert bei dauernder geringer Belastung den Strom durch die Quertransistoren zur Vermeidung unnötiger Wärmeentwicklung.

Schaltenschema eines für Laborzwecke hergestellten stabilisierten Transistor-Netzgerätes nach dem Prinzip von Figur 1a dargestellt. Die Ausgangsspannung kann von 2 V bis 15 V variiert werden, und das Gerät ist bei 2 V bis zu 2,5 A, bei 15 V bis zu 0,9 A belastbar. Der Stabilisierungsfaktor

$$\eta = \frac{\Delta U_E}{U_E} \cdot \frac{U_A}{\Delta U_A}$$

beträgt $\approx 10^3$, der Innenwiderstand des Netzgerätes $R_i \approx 0,5 \cdot 10^{-3} \Omega$. Der Temperaturkoeffizient der Ausgangsspannung liegt bei etwa $3 \text{ mV}/^\circ\text{C}$. Bei konstanter Umgebungstemperatur (Laborbedingungen) bleibt die Ausgangsspannung über eine Stunde auf etwa $\pm 1 \text{ mV}$ konstant. Die Spannungsdifferenz zwischen dem kalten und dem warmen Zustand des Gerätes beträgt etwa 30 mV, und der Endzustand wird in 1/2 h nach dem Einschalten praktisch erreicht.

Als Referenzspannung wird eine stabilisierte Hilfsspannung mit einer Zener-Diode verwendet (durch \cdots in Figur 2 angedeutet). In der vorliegenden Ausführung ist die Konstanz der Ausgangsspannung praktisch durch die Eigenschaften dieser Referenzspannung begrenzt.

Bei hochstabilisierten Netzgeräten besteht ein wesentliches Problem darin, unerwünschte Schwingungen der Regelschaltung zu vermeiden. Zu diesem Zweck sind zusätzliche RC-Glieder eingebaut, die den Frequenzgang passend begrenzen. Der Innenwiderstand ist bis zu 10 kHz durch die Regulierung gegeben

$$0,5 \cdot 10^{-3} \Omega \leq R_i \leq 3,5 \cdot 10^{-3} \Omega.$$

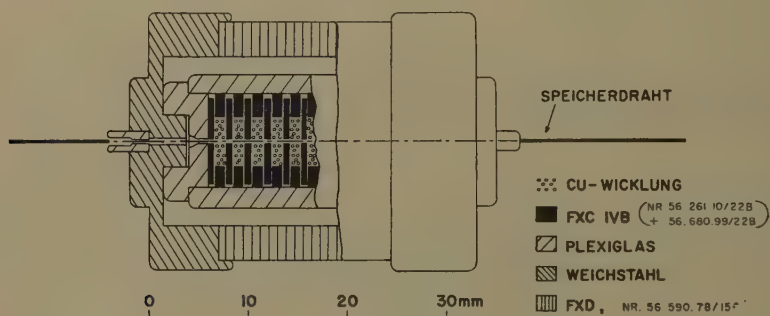
Für höhere Frequenzen bestimmen die am Ausgang liegenden Elektrolytkondensatoren den Innenwiderstand, der bis zu 100 kHz $3,5 \cdot 10^{-2} \Omega$ nicht überschreitet.

Für die finanzielle Unterstützung dieser Untersuchungen sind wir der Stiftung Hasler-Werke zu Dank verpflichtet.

Aufbau grosser Signale mit Elimination von Reflexionen in magnetostriktiven Speicherleitungen. Von D. MAEDER, Zürich¹⁾.

Speicherleitungen, welche auf der Erzeugung elastischer Wellen in ferromagnetischen Drähten beruhen, bilden einen wesentlichen Bestandteil der technischen Realisierung von Vielfachzählgeräten oder kleinen Rechenmaschinen nach dem von HUTCHINSON und SCARROTT angegebenen Prinzip ^{2) 3)}. Bei Verwendung von Nickel machen allerdings die schlechte Reproduzierbarkeit der Grösse und Form der Empfangssignale sowie die beträchtliche Dämpfung und Dispersion das Erreichen grosser Speicherkapazitäten schwierig. Gegen die Verwendung anderer Materialien spricht zunächst die in den meisten Fällen zu geringe Amplitude der empfangenen Signale. Eine andere Schwierigkeit besteht im Auftreten von Reflexionssignalen bei ungenügend gedämpfter Befestigung der Leitungsenden.

Zur Verbesserung der Betriebssicherheit und Erhöhung der Speicherkapazität verwenden wir daher anstelle der üblichen einzelnen Wandlerpule eine aus vielen Spulen bestehende Anordnung (Figur 1).



Figur 1

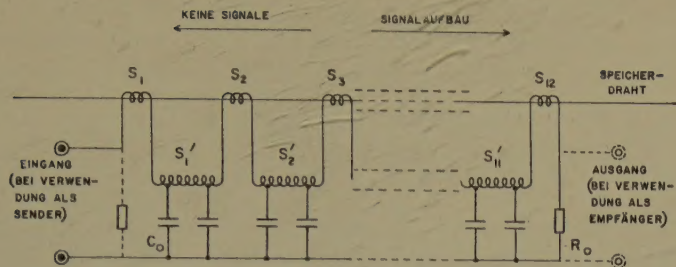
Schnitt durch eine aus 12 Spulen bestehende elektroakustische Impulswandleranordnung. Bei Verwendung von Ni- oder Stahldrähten als akustische Leiter beträgt die Zeitdifferenz zwischen aufeinanderfolgenden Spulen etwa $0,35 \mu\text{s}$. Die Vormagnetisiererringe FXD 56.590.78/15C sind nur bei empfangsseitiger Anwendung erforderlich.

Dem Speicherdraht wird eine in der gewünschten Richtung laufende elastische Welle aufgeprägt, indem man die Spulen zeitlich nacheinander erregt. Die Laufzeitanpassung erfolgt durch Zusammenschalten mit Hilfsspulen und Kapazitäten gemäss Figur 2. Mit je 12 Wandlerpulen erhielten wir sowohl sende- als auch empfangsseitig je eine 6–10fache Erhöhung der Signalamplitude für die bevorzugte Fortpflanzungsrichtung und nahezu vollständige Auslöschung für die Gegenrichtung. Ausserdem stellten wir fest, dass sich die Form der Impulse leicht

¹⁾ Physikalisches Institut der ETH.

²⁾ G. W. HUTCHINSON und G. G. SCARROTT, Phil. Mag. [2] 42, 792 (1951); C. W. McCUTCHEN, Phil. Mag. [8] 2, 113 (1957).

³⁾ D. MAEDER, Helv. phys. Acta 29, 459 (1956).



Figur 2

Zusammenschaltung der Sende- bzw. Empfangsspulen $S_1 \dots S_{12}$ (zum Beispiel je 100 Windungen, $30 \mu\text{H}$) mit den Hilfsspulen $S'_1 \dots S'_{11}$ und Kapazitäten (zum Beispiel je 1000 pF) zu einer Laufzeitkette ($200 \Omega/3,8 \mu\text{s}/0,6 \mu\text{s}$). Ein am linken [rechten] Ende angeschlossener Sender prägt dem [bzw. Empfänger nimmt vom] Speicherdraht nur von links nach rechts laufende Impulse auf.

durch Änderungen in der Art des Zusammenschaltens der Spulensysteme verbessern lässt. Der hohe Wirkungsgrad der neuen Wandleranordnung erlaubt nun auch die Verwendung von Stahldrähten mit dem Vorteil der geringeren Dispersion und besseren Reproduzierbarkeit der Signalform. So erhielten wir nach einer Leitungslänge von 18 m eines rostfreien Stahldrahtes ($\varnothing 0,15 \text{ mm}$) Signale von $0,9 \mu\text{s}$ Basisbreite, was einer Speicherkapazität von etwa 2000 Dualstellen entspricht. Bei Benützung dieser Leitung in einem dekadischen Addiersystem³⁾ konnten wir 300 Dezimalstellen speichern.

Für die Eingangsverstärkung zwischen dem empfangsseitigen Wandler und der Addierschaltung hat sich ein Transistorenverstärker mit automatischer Pegelregelung als nützlich erwiesen. Ein ausführlicher Bericht erscheint demnächst in den *Helvetica Physica Acta*.

Herbst-Tagung der SPG 1957

Die nächste Tagung der SPG (Schweizerische Physikalische Gesellschaft) wird am 22. September in Neuchâtel stattfinden (Sekretariat: Basel, Klingelbergstrasse 82). Die SPG wird als Sektion und im Rahmen der 137. Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft tagen (21. bis 23. September, Neuchâtel).

K. P. MEYER

Internationale Tagung für Elektronenmikroskopie 1958 in Berlin

Die alle vier Jahre stattfindende Internationale Tagung der International Federation of Electron Microscope Societies wird im Jahre 1958 auf Einladung der Deutschen Gesellschaft für Elektronenmikroskopie in Berlin abgehalten. Das Organisationskomitee leitet Prof. RUSKA, Präsident der International Federation of Electron Microscope Societies, Berlin-Dahlem, Faradayweg. Auskünfte erteilt die Deutsche Gesellschaft für Elektronenmikroskopie, durch die Adresse Farbwerke Hoechst AG, Frankfurt am Main, zuhänden von Dr. KEHLER. H. KEHLER

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Journal of Fluid Mechanics. Band 1, Heft 1, Mai 1956. Herausgeber: Dr. G. K. BATCHELOR, Cavendish Laboratory, University of Cambridge, Cambridge, England. Druck und Verlag: Taylor & Francis Ltd., Red Lion Court, Fleet Street, London, E. C. 4. Preis: £ 1 (\$3.00) pro Heft; Subskription £ 5.10.0 pro Band mit sechs Heften.

Das erste Heft dieser neuen Zeitschrift enthält kein Vorwort, aus welchem die Absichten der Herausgeber hervorgingen. Die Zusammensetzung der Redaktion aus hervorragenden Theoretikern, wie G. K. BATCHELOR und M. J. LIDTHILL, lässt immerhin vermuten, dass vor allem die physikalischen und mathematischen Aspekte der Strömungslehre behandelt werden sollen, weniger aber die flugtechnischen oder industriellen Anwendungen dieses Zweiges der Mechanik. Die erste Nummer bestätigt diesen Eindruck. Unter anderem bringt sie Arbeiten über die nichtlineare Theorie der Überschallströmung, eine interessante Untersuchung der Sekundärströmung um Kugel und Zylinder, die experimentelle Bestimmung der Relaxationszeiten für O_2 - und N_2 -Molekeln, eine Studie über die Grenzschicht auf oszillierenden Platten und Zylindern sowie die Berechnung der Diffraktion von Stosswellen durch eine Kante.

Wenn durch die Initiative der Herausgeber die bisher in verschiedenen Zeitschriften der physikalischen oder mathematischen Richtung zerstreuten Arbeiten zusammengefasst und leichter zugänglich gemacht werden können, so ist diese Neuerscheinung nur zu begrüßen.

P. de Haller

Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e. V. (WGL) 1955. Herausgegeben von HERMANN BLENK (Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1956). 360 S., 474 Abb.; DM 48.—.

Das vorliegende Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e. V. gibt wiederum Zeugnis von der positiven, auf guter Tradition basierenden Tätigkeit dieser Gesellschaft. 1912 gegründet, hat sie im Jahre 1936 beim Übergang in die «Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung» eine Bilanz, bestehend aus 24 Jahrgängen der «Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt» und aus 12 Jahrbüchern der WGL, aufzuweisen gehabt. Nachdem im Jahre 1945 die «Lilienthal-Gesellschaft» ihre Tätigkeit eingestellt hat, entstand in der deutschsprachigen, flugtechnischen Literatur eine Lücke, die aufzufüllen, unter anderen sich die 1952 wieder ins Leben gerufene WGL vorgenommen hat. Als Mittel zur Erfüllung dieser Aufgabe dienen der Gesellschaft die «Zeitschrift für Flugwissenschaften (ZFW)» und die Jahrbücher der WGL.

Der seit der Neugründung 4. Jahrgang des Jahrbuches bringt vor allem Vorträge der WGL-Tagung in Augsburg (12. bis 15. Oktober 1955) zum Abdruck, die, unter internationaler Beteiligung namhafter Fachleute, einen interessanten Querschnitt der flugtechnischen Probleme und Fragen der Gegenwart geben. Durch die Veröffentlichung sind Arbeiten aus folgenden Teilgebieten erfasst worden: Geschichte und Rechtsfragen, Tragflügel-Aerodynamik und Gasdynamik, Propeller, Turbomaschinen und Strahltriebwerke, Betriebssicherheit, Steuerung, Instrumente und Navigation, Messtechnik und Windkanäle, Lärmbekämpfung, Flugzeugbau und Werkstoffe.

Die wertvolle Ausgabe berechtigt, weitere Publikationen dieser regen Arbeitsgruppe mit aufmerksamem Interesse zu erwarten.

Z. Plaskowski

ELEKTRONENMIKROSKOPE
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH



Clichés für wissenschaftliche Arbeiten
unsere Spezialität

SCHÜTZENMATTSTR. 31

Clichés
STEINER+CO BASEL

Prof. Dr. HELMUT HASSE

Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht

32 Seiten, DIN A 5 Pappband mit Schutzumschlag DM 4.80

Meine Ausführungen richten sich keineswegs nur an Mathematiker, vielmehr an alle geistig und kulturell interessierten Menschen, mögen sie der mathematischen Wissenschaft nahe- oder fernstehen, sie hoch oder gering schätzen, wenn sie nur das Bedürfnis haben, ihren Blick einmal über ihr eigenes fachliches Tätigkeitsgebiet hinaus zu erheben, um sich für eine Stunde mit einer so bedeutenden Kulturerscheinung zu beschäftigen, wie es die mathematische Wissenschaft ist.

Nicht zuletzt wende ich mich auch an die akademische Jugend meines eigenen Faches; an diese Jugend, die im nur allzu voll ausgefüllten Rahmen des eigentlichen Fachstudiums erfahrungsgemäss nur wenig Zeit findet, um sich über den tieferen Sinn der Mathematik und ihre Stellung im Ganzen unserer Kultur Gedanken zu machen.

Eine Wissenschaft, deren über zweitausendjährige Geschichte ein dauerndes, stetiges Aufsteigen in immer grössere Höhen gewesen ist, darf stolz und mutig vor die Welt hintreten mit dem Bekenntnis: «Hier bin ich; seht voll Ehrfurcht auf die tiefen Erkenntnisse im Reiche des Denkens, die ich gewonnen habe, bewundert meine kristallklare, lebendige Schönheit und staunt, welche Fähigkeiten ich euch in die Hand gebe!»

Verlag für angewandte Wissenschaften, Baden-Baden, Hardstr. 1c

Prof. Dr. S. VALENTINER:

Physikalische Grundlagen der Messtechnik in der Wärmewirtschaft

VIII, 150 S., 48 Abb., DIN A 5, 2. Auflage

Ganzleinen mit Schutzumschlag

DM 12.80

Verbilligte broschierte Ausgabe für Studenten

DM 8.80

Die erste Auflage wurde in wissenschaftlichen und technischen Zeitschriften sehr günstig besprochen. Das Buch will in einem kurzen Überblick die Kenntnisse vermitteln, die notwendig sind, um den Verbleib der Wärmeenergie in technischen Betrieben überwachen und ausnutzen zu können. Es gibt die Grundlagen der technischen Wärmelehre in engstem Anschluss an die Praxis und unterscheidet sich gerade durch diese unmittelbare Bezugnahme auf in der Technik auftretende Probleme von anderen Büchern, die diesen Grundlagen gewidmet sind. Der der 2. Auflage zugefügte Anhang enthält teils Ergänzungen für Leser, die an den inneren physikalischen Zusammenhängen besonderes Interesse haben, teils Hinweise auf Neuerungen, teils neue Beispiele. Der Text selbst wurde trotz der weitgehenden Verwendung des anastatischen Druckverfahrens an vielen Stellen wesentlich verändert, um neuen Erkenntnissen Rechnung zu tragen; auch neue Abbildungen wurden eingefügt.

In einer knappen, gut gegliederten Form und durch die übersichtliche, das Wesentliche betonende Darstellungsweise ist das Buch den in der Praxis stehenden Ingenieuren ein schneller Ratgeber, insbesondere aber auch heranwachsenden Ingenieuren, z. B. den Studenten an den technischen Hochschulen und Universitäten, die ein technisches Fach ergriffen haben und sich mit wärmewirtschaftlichen Fragen beschäftigen oder sich ganz allgemein der technischen und der experimentellen Physik widmen, beim Studium und zur Wiederholung von grossem Nutzen.

Verlag für angewandte Wissenschaften, Baden-Baden, Hardstr. 1c